Eine Bemerkung zu einem graphentheoretischen Satz von Minty

Carl-Günter d'Ambly

Allem Anschein nach ist der unten zitierte Satz, der auf G.J.MINTY zurückgeht und von C. BERGE mit dem Namen " Lemme des arcs colorés" belegt worden ist, bisher nur für endliche Graphen ausgesprochen und bewiesen worden ([1], [2], [3], [4]). Durch eine leichte Modifikation des Beweises von BERGE ([1], p. 124) läßt sich unschwer zeigen, daß der genannte Satz auch für unendliche Graphen gilt.

Unter einem Graphen $G = (N,U,\alpha,\beta)$ soll im folgenden ein gerichteter Graph verstanden werden, der Schlingen und Mehrfachkanten aufweisen darf. Das bedeutet, N und U sind zwei beliebige (endliche oder unendliche), aber disjunkte Mengen; N heißt die Menge der Knotenpunkte und U die Menge der Kanten von G; α und β sind eindeutige Abbildungen von U in N, d.h., jeder Kante ist vermöge α ein Anfangspunkt und vermöge β ein Endpunkt zugeordnet. G heißt endlicher Graph, wenn sowohl die Menge N als auch die Menge U endlich ist. Es bedeutet (X,Y) mit $X, Y \subseteq N$ die Gesamtheit aller Kanten von G, die in der Menge X entspringen und in der Menge Y enden: $(X,Y) = \{u: u \in U \wedge \alpha(u) \in X \wedge \beta(u) \in Y\}$. Handelt es sich bei einer der Mengen X, Y um eine einelementige Menge, so wird die Mengenklammer weggelassen; z.B. (x,N) oder (x,y).

Eine endliche Folge $\mu = (x_0,u_1,x_1,u_2,\ldots, u_n,x_n)$ heißt Kette von x_0 nach x_n in G, wenn $n \geq 0$, $x_i \in N$ für $0 \leq i \leq n$, $u_j \in (x_{j-1},x_j) \cup (x_j,x_{j-1})$ für $1 \leq j \leq n$ und $u_k \neq u_l$ für $1 \leq k < l \leq n$ gilt. Eine geschlossene Kette mit mindestens einer Kante, d.h. $n \geq 1$, soll Zyklus genannt werden. Ein Zyklus heißt minimal, wenn er keinen echten Teilzyklus enthält. Zwei Kanten eines Zyklus in G haben (bezüglich des Zyklus) dieselbe Orientierung, wenn ihre Anfangspunkte in der Folge μ beide vor bzw. beide hinter den Kanten stehen. Ein Zyklus, dessen Kanten sämtlich die gleiche

Orientierung haben, heißt ein Kreis. Dann gilt:

(1) Jeder nicht-minimale Zyklus in G läßt sich in paarweise kanten-disjunkte minimale Teilzyklen zerlegen. Zwei Kanten haben bezüglich eines Teilzyklus dieselbe Orientierung genau dann, wenn sie bezüglich des Ausgangszyklus die gleiche Orientierung besitzen.

Eine Teilmenge ω von Kanten aus G heißt Cozyklus in G, wenn es eine Teilmenge X von Knotenpunkten aus G gibt derart, daß ω die Gesamtheit der zwischen X und $\bar{X}$ eingespannten Kanten bildet, d.h. daß $\omega = (X,\bar{X}) \cup (\bar{X},X)$ gilt. Dabei bedeutet $\bar{X}$ das Komplement von X bezüglich N. Der von der Menge $X \subseteq N$ erzeugte Cozyklus $(X,\bar{X}) \cup (\bar{X},X)$ wird mit $\omega(X)$ bezeichnet. Ein Cozyklus heißt minimal, wenn er keinen echten Teilcozyklus enthält. Zwei Kanten eines Cozyklus $\omega(X)$ in G haben (bezüglich des Cozyklus) dieselbe Orientierung, wenn ihre Anfangspunkte beide der Menge X bzw. beide der Menge $\bar{X}$ angehören. Ein Cozyklus, dessen Kanten sämtlich die gleiche Orientierung besitzen, heißt ein Cokreis. Es gilt dann:

(2) Jede Kette, die einen Punkt aus X mit einem Punkt aus $\bar{X}$ verbindet, hat mindestens eine Kante mit dem Cozyklus $\omega(X)$ gemeinsam; das heißt, $\omega(X)$ ist eine die Mengen X und $\bar{X}$ trennende Kantenmenge.

(3) Jeder nicht-minimale Cozyklus in G läßt sich in paarweise disjunkte minimale Cozyklen zerlegen. (Man vergleiche etwa [1], p. 123.) Zwei Kanten haben bezüglich eines Teilcozyklus dieselbe Orientierung genau dann, wenn sie bezüglich des Ausgangscozyklus die gleiche Orientierung besitzen.

Jetzt stehen sämtliche Begriffe und Hilfsmittel bereit, um den Satz von Minty zu formulieren und zu beweisen:

Satz: In einem Graphen G sei eine Kante v willkürlich ausgezeichnet. Ferner sei die Menge U der Kanten von G beliebig in drei paarweise disjunkte Klassen A, B, C zerlegt mit der Einschränkung, daß die ausgezeichnete Kante v der Klasse A angehöre. Dann gilt eine und nur eine der folgenden Aussagen:

(I) Die Kante v liegt auf einem minimalen Zyklus, der nur Kanten der Klassen A und B aufweist; alle zur Klasse A gehörenden Kanten des Zyklus haben (bezüglich des Zyklus) dieselbe Orientierung wie die Kante v.

(II) Die Kante v gehört einem minimalen Cozyklus an, der nur aus Kanten der Klassen A und C besteht; alle zur Klasse A gehörenden Kanten des Cozyklus haben (bezüglich des Cozyklus) dieselbe Orientierung wie die Kante v.

Die Aussagen (I) und (II) schließen sich gegenseitig aus. Denn gehört die Kante v sowohl einem Zyklus μ an, dessen Kanten sämtlich in $A \cup B$ liegen, als auch einem Cozyklus ω, dessen Kanten sämtlich aus $A \cup C$ stammen, so hat die durch Entfernung der Kante v aus dem Zyklus μ hervorgehende Kette von $\beta(v)$ nach $\alpha(v)$ gemäß (2) mindestens eine Kante mit dem Cozyklus ω gemeinsam. Diese Kante kann nur zu A gehören und muß folglich gemäß (I) dieselbe Orientierung wie v bezüglich μ und gemäß (II) dieselbe Orientierung wie v bezüglich ω haben. Dies ist jedoch nicht möglich.

Es bleibt zu zeigen, daß stets eine der beiden Aussagen (I) oder (II) zutrifft. Zu diesem Zwecke betrachtet man die Gesamtheit $K_{\beta(v)}$ aller Knotenpunkte x von G, die mit $\beta(v)$ durch eine Kette verbunden sind mit der Eigenschaft: alle Kanten der Kette gehören zu $A \cup B$, und darüber hinaus haben alle aus A stammenden Kanten der Kette eine Orientierung von $\beta(v)$ nach x. Der Anfangspunkt der ausgezeichneten Kante v kann nun entweder zu $K_{\beta(v)}$ oder zu dessen Komplement $\bar{K}_{\beta(v)}$ gehören:

<u>Fall I:</u> $\alpha(v) \in K_{\beta(v)}$. Handelt es sich bei der ausgezeichneten Kante v um eine Schlinge, so gilt $\alpha(v) = \beta(v)$. Das heißt, v liegt auf dem minimalen Zyklus $(\alpha(v), v, \beta(v))$. Ist v keine Schlinge, d.h. gilt $\alpha(v) \neq \beta(v)$, so existiert auf Grund des "Zusammenhangs" der Menge $K_{\beta(v)}$ eine Kette von $\beta(v)$ nach $\alpha(v)$, deren Kanten alle zu $A \cup B$ gehören und deren aus A stammende Kanten sämtlich von $\beta(v)$ nach $\alpha(v)$ orientiert sind. Durch Anfügen der Kante v läßt sich diese Kette schließen; d.h. es ent-

steht ein Zyklus, dessen Kanten alle zu $A \cup B$ gehören und dessen aus A stammende Kanten (bezüglich des Zyklus) sämtlich dieselbe Orientierung wie v haben. Ist dieser Zyklus nicht minimal, so läßt er sich gemäß (1) in kanten-disjunkte minimale Zyklen zerlegen, deren einer v enthalten muß. Außerdem überträgt sich, daß dieser minimale Teilzyklus nur Kanten aus $A \cup B$ enthält und daß alle seine aus A stammenden Kanten (bezüglich des Teilzyklus) dieselbe Orientierung wie v haben. Damit ist gezeigt, daß im vorliegenden Falle gerade die Aussage (I) des Satzes zutrifft.

<u>Fall II:</u> $\alpha(v) \in \bar{K}_{\beta(v)}$. Dann erzeugt $K_{\beta(v)}$ einen nicht-leeren Cozyklus $\omega(K_{\beta(v)})$, der nur Kanten aus $A \cup C$ aufweist, und alle zu A gehörenden Kanten von $\omega(K_{\beta(v)})$ haben (bezüglich des Cozyklus) dieselbe Orientierung wie v. Denn es gilt:
$v \in (\bar{K}_{\beta(v)}, K_{\beta(v)})$; aus $u \in \omega(K_{\beta(v)})$ folgt $u \notin B$ und aus $u \in \omega(K_{\beta(v)}) \cap A$ folgt $u \in (\bar{K}_{\beta(v)}, K_{\beta(v)})$. Ist $\omega(K_{\beta(v)})$ kein minimaler Cozyklus, so zerlegt man ihn nach (3) in paarweise disjunkte minimale Cozyklen, deren einer v enthalten muß. Dabei überträgt sich von $\omega(K_{\beta(v)})$ auf den die Kante v enthaltenden minimalen Cozyklus die Eigenschaft, nur Kanten aus $A \cup C$ aufzuweisen, wobei sämtliche aus A stammenden Kanten (bezüglich des Teilcozyklus) dieselbe Orientierung wie v besitzen. Also gilt im vorliegenden Falle gerade die Aussage (II) des Satzes.

Wählt man die Zerlegung der Menge U der Kanten von G insbesondere so, daß $A = U$ und $B = C = \emptyset$ gilt, so erhält man aus dem obigen Satz folgendes

<u>Korollar:</u> Jede Kante eines Graphen G liegt entweder auf einem minimalen Kreis oder auf einem minimalen Cokreis von G.

Literatur

[1] Berge, C.; Ghouila-Houri, A.: Programmes, jeux et réseaux de transport. Dunod, Paris, 1962.

[2] Harary, F.: Graph Theory and Electrical Networks. I.R.E. Trans. on Circuit Theory, CT-6 (1959), 95-109.

[3] Minty, G.J.: Monotone Networks. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 257 (1960), 194-212.

[4] Minty, G.J.: On the Axiomatic Foundations of the Theories of Directed Linear Graphs, Electrical Networks and Network-Programming. J. Math. and Mech., 15 (1966), 485-520.