Zum Mengerschen Graphensatz

Rudolf Halin

Im folgenden soll ein in wesentlichen Teilen neuer Beweis des Mengerschen Graphensatzes in der Formulierung für gerichtete Graphen gegeben werden [1]. Unsere Überlegungen lassen sich aber ohne weiteres auch auf ungerichtete Graphen anwenden [2]. Darüber hinaus soll ein Analogon des Mengerschen Satzes für unendliche Bahnen bewiesen werden.

1.

Ein gerichteter Graph $G = (E,K)$ werde definiert als eine Menge E, deren Elemente die Ecken von G heißen, zusammen mit einer zweistelligen irreflexiven Relation K in E; K ist eine Menge von geordneten Paaren (a,b) mit $a, b \in E$ und $a \neq b$. Jedes Paar $(a,b) \in K$ heißt eine Kante von G. (Schlingen und Parallelkanten sind also im folgenden ausgeschlossen.) Mit $\alpha(G)$ bzw. $\varkappa(G)$ bezeichnen wir die Mächtigkeit von E bzw. von K.

$k = (a,b)$ sei eine Kante von $G = (E,K)$. Unter $G - k$ verstehen wir den Graphen $(E, K - \{k\})$. Weiter sagen wir, der Graph $G' = (E',K')$ geht aus G durch Kontraktion der Kante k auf die Ecke x $(x \notin E \cup K)$ hervor, wenn $E' = (E - \{a,b\}) \cup \{x\}$ gilt und K' folgendermaßen definiert ist (e, f seien verschiedene Elemente von E'):

---

1) Daß der Mengersche Satz auch für gerichtete Graphen stimmt, ist meines Wissens zuerst von G.A. Dirac [1] gezeigt worden.

2) Man braucht nur jedem ungerichteten Graphen G (ohne Schlingen und Mehrfachkanten) einen gerichteten Graphen G' wie folgt zuzuordnen: G' habe dieselbe Eckenmenge wie G, und in G' sollen die gerichteten Kanten (a,b) und (b,a) genau dann existieren, wenn a,b in G durch eine Kante verbunden sind.

I) Falls $e, f \neq x$, so sei $(e,f) \in K'$ genau dann, wenn $(e,f) \in K$;

II) falls $e = x$, so sei $(e,f) \in K'$ genau dann, wenn $(a,f) \in K$ oder[3] $(b,f) \in K$;

III) falls $f = x$, so sei $(e,f) \in K'$ genau dann, wenn $(e,a) \in K$ oder[3] $(e,b) \in K$.

Ein gerichteter Graph $B = (E,K)$ heißt eine Bahn, wenn E von der Form $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ist und K aus den Kanten (a_i, a_{i+1}), $i = 0, \ldots, n-1$, besteht $(n \geq 0)$; wir sagen, dieses B führt von a_0 nach a_n, und nennen dieses B auch eine a_0,a_n-Bahn. Eine Kante (a,b) kann als eine a,b-Bahn aufgefaßt werden.

Ist $G = (E,K)$, $a \in E$, $T \subset E$ mit $a \notin T$, so werde eine a,t-Bahn B in G als eine a,T-Bahn bezeichnet, wenn $t \in T$ ist und B außer t keine Ecke $\in T$ enthält. Hat man zu jedem $t \in T$ eine a,t-Bahn B_t derart, daß je zwei dieser Bahnen nur a gemeinsam haben, so nennen wir die Vereinigung dieser B_t $(t \in T)$ einen a,T-Fächer. – Weiter verstehen wir unter $G(a \to T)$ den folgenden Graphen (E',K'): E' sei die Menge derjenigen $e \in E$, für die es eine a,e-Bahn in G gibt, die höchstens e mit T gemeinsam hat, und K' sei die Einschränkung von K auf E'. – Sind a,b Ecken von G, so sagen wir, $T \subset E$ trennt a,b in G, wenn $a,b \notin T$ und $b \notin G(a \to T)$ gilt, wenn also jede a,b-Bahn in G eine Ecke von T trifft und a,b selbst nicht in T liegen.

Es gelte $a \in E$, und es seien T, U, V Teilmengen von E. Wir sagen, T ist a-Vorgänger von U in G, wenn $a \notin T \cup U$ gilt und jede a,U-Bahn in G eine Ecke von T trifft. Dann ist klar:

(1) Ist T ein a-Vorgänger von U sowie U ein a-Vorgänger von V (jeweils in G), so ist T ein a-Vorgänger von V (in G).

---

[3] Im Sinne des lateinischen "vel".

Wir beweisen folgenden Hilfssatz:

> (2) Es sei V ein a-Vorgänger von T in G, und es existiere in G ein a,V-Fächer F. $k = (v', v'')$ sei eine Kante von G mit $v', v'' \in V$. Es sei U ein a-Vorgänger von T in $G - k$.
> B e h a u p t u n g : Es gibt in G einen a-Vorgänger W von T mit $\alpha(W) \leq \alpha(U)$.

B e w e i s : Es sei U' die Menge der $u \in U$ mit $u \in G(a \to V)$. Für jedes $v \in V$ bezeichne B_v die a,v-Bahn $\subseteq F$, und es sei V' die Menge der $v \in V$, für die B_v wenigstens ein $u \in U$ enthalt. Nunmehr sei $W = (U - U') \cup V'$; natürlich ist $\alpha(W) \leq \alpha(U)$.

Weiter sei B eine a,T-Bahn $\subseteq G$; wir nehmen an, daß W von B nicht getroffen wird. Es sei d die letzte Ecke, die B (von a aus durchlaufen) mit $G(a \to V)$ gemeinsam hat. d muß $\in V$ sein; andernfalls erhielte man mittels einer a,d-Bahn, die V nicht trifft, und der in B enthaltenen d,T-Bahn, die mit B' bezeichnet werde, eine a,T-Bahn, die V nicht trifft.
$B'' = B_d \cup B'$ ist eine a,T-Bahn, die k nicht enthält, V' und damit (wegen $B_d \subseteq B''$ und $B' \cap G(a \to V) = \{d\}$) U' vermeidet.
B_d und B' vermeiden $U - U'$ wegen $B_d \subseteq G(a \to V)$ und $B' \subseteq B$.
B'' ware also eine a,T-Bahn in $G - k$, die V nicht trifft.
Aus diesem Widerspruch folgt, daß unsere Annahme falsch ist, W also in G ein a-Vorgänger von T mit $\alpha(W) \leq \alpha(U)$ ist, q.e.d.

Nunmehr folgt

> (3) Es sei $G = (E,K)$ ein endlicher gerichteter Graph, $a \in E$, $T \subseteq E - \{a\}$. Besitzt T keinen a-Vorgänger in G mit weniger als $\alpha(T)$ Ecken, so existiert in G ein a,T-Fächer.

B e w e i s : Zu jedem $t \in T$ existiert in G eine Kante (s,t) mit $s \notin T$; andernfalls erhielte man einen a-Vorgänger zu T, der in T echt enthalten ist. Ist $(a,t) \in K$ für alle $t \in T$, so sind wir fertig; daher können wir annehmen, daß $k = (s,t) \in K$

existiert mit $s \neq a$, $\notin T$ und $t \in T$. Es sei nun G' der Graph, der aus G durch Kontraktion von k auf eine Ecke t' hervorgeht.

Es sei $T' = (T - \{t\}) \cup \{t'\}$; dann ist $\alpha(T') = \alpha(T)$ wegen $s \notin T$. Ferner ist $\varkappa(G') < \varkappa(G)$. Nehmen wir nun an, die Behauptung sei für Graphen mit weniger als $\varkappa(G)$ Kanten richtig, so existiert in G' entweder ein a,T'-Fächer F' oder ein a-Vorgänger V' von T' mit $\alpha(V') < \alpha(T')$.

Im ersten Falle erhielte man mittels F' leicht einen a,T-Fächer in G. Daher werde die zweite Alternative als gegeben angenommen.

Enthält V' nicht t', so ist $V' \subseteq E$. Wegen $\alpha(V') < \alpha(T)$ gibt es in G eine a,T-Bahn B, die V' vermeidet. Vermeidet B auch $\{s,t\}$, so ist $B \subseteq G'$ und widerspricht der Wahl von V'. Falls B aber $\{s,t\}$ trifft, so enthält B eine $a,\{s,t\}$-Bahn B; dieser entspricht in G' eine a,t'-Bahn, die V' nicht trifft. Also folgt $t' \in V'$.

$V = (V' - \{t'\}) \cup \{s,t\}$ ist nun ein a-Vorgänger zu T in G. Wegen $\alpha(V') < \alpha(T)$ und wegen der Voraussetzung über T folgt $\alpha(V) = \alpha(T)$, und wegen (1) erfüllt V in bezug auf a wieder die Voraussetzungen des Satzes. Aus $s \notin T$ folgt aber, daß ein $t'' \in T$ mit $t'' \notin V$ existiert; daher ist $\varkappa(G(a \to V)) < \varkappa(G)$. Somit können wir annehmen, daß in G ein a,V-Fächer existiert [4]. Nach (2) kann es auch in $G - k$ keinen a-Vorgänger von T mit weniger als $\alpha(T)$ Ecken geben. Daher folgt die Behauptung durch vollständige Induktion über $\varkappa(G)$; für $\varkappa(G) = 0$ ist die Behauptung ja trivial.

G_D bezeichne den Dualgraph von $G = (E,K)$, d.h. es sei $G_D = (E,K_D)$, wobei $(a,b) \in K_D$ sei genau dann, wenn $(b,a) \in K$ gilt.

Ist B eine a,b-Bahn in G, so ist B_D eine b,a-Bahn in G_D. Ein $T \subset E$ trennt daher a,b in G genau dann, wenn es b,a in G_D trennt. Ist nun T eine a,b in G trennende

---

[4] Es ist klar, daß jeder a-Vorgänger U von V in $G(a \to V)$ auch ein a-Vorgänger von V in G ist; denn nach Definition von $G(a \to V)$ ist jede a,V-Bahn $\leq G$ in $G(a \to V)$ enthalten.

Eckenmenge mit kleinster Eckenzahl, so folgt aus (3) zusammen mit (1), daß in G ein a,T-Fächer F_a existiert und, wegen der letzten Bemerkung, daß in G_D ein b,T-Fächer F_b existiert. $F_a \cup (F_b)_D$ ergibt dann die Vereinigung von $\alpha(T)$ a,b-Bahnen in G, von denen je zwei nur a,b gemeinsam haben. Umgekehrt kann es natürlich kein System von mehr als $\alpha(T)$ bis auf a,b fremden a,b-Bahnen in G geben, da jede a,b-Bahn ja T trifft. Damit ist bewiesen:

> Mengerscher Satz: Ist $G = (E,K)$ ein endlicher gerichteter Graph, so stimmt für je zwei verschiedene Ecken a,b mit $(a,b) \notin K$ die Maximalzahl bis auf a,b fremder a,b-Bahnen $\subseteq G$ überein mit dem Minimum der Eckenzahlen aller a,b in G trennenden Eckenmengen.

Der Mengersche Satz (in dieser Formulierung) gilt auch für unendliche $G = (E,K)$. Den Fall, daß ein endliches a,b trennendes T in G existiert, kann man auf den Fall eines endlichen G zurückführen (vgl. [2], S. 247 f.). Im Falle, daß jede a,b in G trennende Eckenmenge unendlich ist, betrachtet man die durch die Inklusion teilgeordnete Menge aller Systeme von bis auf a,b fremden a,b-Bahnen $\subseteq G$. Hat man eine Menge von solchen Systemen, die bezüglich der Inklusion totalgeordnet ist, so ist die Vereinigung dieser Systeme offenbar auch wieder ein System dieser Art. Nach dem Zornschen Lemma gibt es daher ein in bezug auf die Inklusion maximales solches System S; es bestehe etwa aus $\mathfrak{m}$ a,b-Bahnen. Wegen der Maximalität von S muß jede a,b-Bahn $\subseteq G$ mindestens eine Ecke $\neq a,b$ mit einer der Bahnen von S gemeinsam haben, d.h. die Ecken $\neq a,b$ der Bahnen aus S bilden ein T mit $\alpha(T) = \mathfrak{m}$. Umgekehrt gibt es zu jedem T mit $\alpha(T) < \mathfrak{m}$ und $a,b \notin T$ in S eine a,b-Bahn, die T nicht trifft; daraus folgt die Behauptung des Mengerschen Satzes auch in diesem Falle.

3.

Unter einer in einer Ecke a_0 beginnenden <u>unendlichen Bahn</u> verstehen wir einen Graphen der Form $B = (E,K)$ mit abzählbarer Eckenmenge $E = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ und der Kantenmenge

$K = \{(a_i, a_{i+1}) \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$. Wir können dieses B auffassen als eine Bahn, die a_0 mit einer uneigentlichen Ecke ∞ verbindet, und als eine a,∞-Bahn bezeichnen.

Der Mengersche Satz kann – für endliche n – auch wie folgt formuliert werden: Es sei $G = (E,K)$ ein gerichteter Graph, a,b seien verschiedene Ecken aus G mit $(a,b) \notin K$. Gibt es nach Streichung irgendwelcher $n-1$ Ecken $\in E - \{a,b\}$ in dem Restgraphen immer noch eine a,b-Bahn, so gibt es n bis auf a,b fremde a,b-Bahnen in G. Wir können nun fragen, ob diese Aussage richtig bleibt, wenn wir für b die uneigentliche Ecke ∞ wählen. Die Antwort lautet im allgemeinen Falle verneinend. Man betrachte nämlich den Graphen $G = (\{a, a_0, a_1, a_2, \ldots\}, \{(a_0,a_1), (a_1,a_2), \ldots\} \cup \{(a, a_i) \mid i = 0, 1, 2, \ldots\})$. Streicht man in G irgendwelche endlich vielen Ecken $\neq a$, so existiert in dem Restgraphen immer noch eine unendliche Bahn, die in a beginnt; in G haben aber je zwei a,∞-Bahnen Ecken $\neq a$ gemeinsam. Es gilt aber (vgl. [3], Satz 3):

<u>Satz:</u> Es sei $G = (E,K)$ ein gerichteter Graph. Zu jedem $e \in E$ sollen nur endlich viele $k \in K$ der Form $k = (e,f)$ existieren. a sei eine feste Ecke aus G, n eine natürliche Zahl. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Es existieren n bis auf a fremde unendliche Bahnen in G, die in a beginnen;

2) Streicht man in G irgendwelche $n-1$ Ecken $\neq a$, so existiert in dem Restgraphen immer noch mindestens eine a,∞-Bahn;

3) Streicht man in G irgendwelche $n-1$ Ecken $\neq a$, so existieren in dem Restgraphen immer noch unendlich viele Ecken b, die von a aus durch eine a,b-Bahn erreichbar sind.

B e w e i s : 1) $\Rightarrow$ 2) und 2) $\Rightarrow$ 3) sind trivial. Zum Beweis von 3) $\Rightarrow$ 1) bezeichne E_m für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ die Menge aller $e \in E$, für die in G eine a,e-Bahn mit m Kanten, aber keine a,e-Bahn mit weniger als m Kanten existiert. Jedes E_m ist endlich; andernfalls gäbe es ein kleinstes m, so, daß E_m unendlich ist $(m \geq 1)$; in E_{m-1} müßte es dann eine Ecke geben, von der unendlich viele Kanten fortlaufen, was der Voraussetzung über G widerspricht. Daher ist wegen 3) keines der E_m leer.

Für $m > h \geq 1$ ist E_h ein a-Vorgänger von E_m. Es folgt daraus, daß jede a,∞-Bahn alle E_m treffen muß.

Als ein Ψ_m $(m = 1, 2, \ldots)$ werde jeder a,T-Fächer mit $T \subseteq E_m$ und $\alpha(T) = n$ bezeichnet. G_m $(m \geq 1)$ sei der Graph $(\bigcup_{\mu=0}^{m} E_\mu, K_m)$, wo K_m die Einschränkung von K auf $\bigcup_{\mu=0}^{m} E_\mu$ darstellt. Zu jedem G_m adjungieren wir nun eine neue Ecke b_m, die wir genau mit jeder Ecke $e \in E_m$ durch eine Kante (e,b_m) verbinden; der entstehende Graph sei G'_m.

Angenommen, es gebe in G'_m ein a,b_m trennendes T mit $\alpha(T) < n$. T wäre dann auch a-Vorgänger zu E_m; daher müßte jede a,E_r-Bahn in G mit $r \geq m$ dieses T treffen, und es wären nur höchstens die endlich vielen Ecken $\in \bigcup_{\mu=0}^{m-1} E_\mu$ nach Streichung von T in dem Restgraphen von a aus durch Bahnen erreichbar, was der Voraussetzung widerspricht. Wir schließen aus dem Mengerschen Satz, daß es für jedes $m \geq 1$ mindestens ein Ψ_m in G geben muß.

Wir wenden nun eine Schlußweise von D. KÖNIG an (s. [2], Kap. VI, Satz 3). Jedes Ψ_m enthält für $\mu = 1,\ldots,m$ wenigstens ein Ψ_μ, und für jedes m gibt es wegen der Endlichkeit von G_m nur endlich viele Ψ_m. Da die Menge der Ψ_m (für $m = 1, 2,\ldots$) unendlich ist, gibt es also ein Ψ_1 – es werde mit Ψ'_1 bezeichnet – , das in unendlich vielen Ψ_μ $(\mu > 1)$ enthalten ist. Es sei nun schon Ψ'_m so bestimmt $(m \geq 1)$, daß es in unendlich vielen Ψ_μ $(\mu > m)$ enthalten ist. In der unendlichen Menge der Ψ'_m enthaltenden Ψ_μ $(\mu > m)$ gibt es somit eine unendliche Teilmenge derart, daß jedes Element daraus dasselbe Ψ_{m+1} enthält; dieses Ψ_{m+1} wählen wir als Ψ'_{m+1}. So wird induktiv eine unendliche Folge $\Psi'_1, \Psi'_2, \ldots$ bestimmt derart, daß für $m = 1, 2,\ldots$ stets Ψ'_m in Ψ'_{m+1} enthalten ist. Die Vereinigung dieser Ψ'_m ergibt offenbar ein System von n bis auf a fremden a,∞-Wegen.

Literatur

[1] Dirac, G.A.: Extensions of Menger's theorem. J. London Math. Soc. 38 (1963), 148 - 161.

[2] König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

[3] Halin, R.: Über trennende Eckenmengen in Graphen und den Mengerschen Satz. Math. Ann. 157 (1964), 34-41.