

Verallgemeinerte Farbenzahlen

Herbert Izbicki

Sei $\{X\}$ eine Klasse von auf orientierbare Flächen eingebetteten

Landkarten; sei $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine symmetrische Matrix

aus Nullen und Einsen; sei $X \in \{X\}$, dann heiÙe eine Färbung der Knotenpunkte, Kanten und Länder von X zulässig bezüglich A , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Ist $a_{00} = 1$, so müssen benachbarte Knotenpunkte verschieden gefärbt sein,

ist $a_{11} = 1$, so müssen benachbarte Kanten verschieden gefärbt sein,

ist $a_{22} = 1$, so müssen benachbarte Länder verschieden gefärbt sein,

ist $a_{01} = a_{10} = 1$, so müssen inzidente Kanten und Knotenpunkte verschieden gefärbt sein,

ist $a_{02} = a_{20} = 1$, so müssen inzidente Länder und Knotenpunkte verschieden gefärbt sein,

ist $a_{12} = a_{21} = 1$, so müssen inzidente Länder und Kanten verschieden gefärbt sein.

Die minimale Farbenanzahl, die erforderlich ist, um X bezüglich A zulässig zu färben, heiÙe die Farbenzahl $\chi(A;X)$ von X bezüglich A . Weiter sei $\chi(A) = \sup \{\chi(A;X) | X \in \{X\}\}$.

Meine Dissertantin Frl. MARIANNE NEUBERGER (heute Fr. Dr. HENHAPL) hat den Fall untersucht, in dem $\{X\}$ die Menge aller normalen Landkarten auf der Kugel bedeutet. Ihre Resultate sind in der bei-

gegebenen Tabelle zusammengefaßt. In der ersten Spalte ist die Matrix A in der Form $a_{00} a_{01} a_{02} a_{11} a_{12} a_{22}$ gegeben, in der zweiten Spalte ihre Numerierung der Sätze. In der dritten Spalte (unter A) steht $\chi(A)$; wo zwei Zahlen stehen, bedeutet das, daß $\chi(A)$ einen dieser beiden Werte hat. In der vierten Spalte schließlich (unter B) stehen jene Werte für $\chi(A)$, die man erhält, wenn man die Vierfarbenvermutung (die selbst in der Zeile 000 00 1 zu finden ist) als richtig annimmt. Unter dieser Annahme bleiben nur die beiden Fälle 110 11 0 und 110 11 1 offen.

Abschließend sei bemerkt, daß G. RINGEL in seiner Arbeit "Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Band 29, Heft 1/2, Dez. 1965, auch ohne Zuhilfenahme der Vierfarbenvermutung bewiesen hat, daß $\chi(101 00 1) = 6$ ist. Dieses Resultat war Frl. NEUBERGER zur Zeit ihrer Untersuchungen aber nicht bekannt.

Die besprochene Dissertation von Frl. NEUBERGER ist bisher nicht im Druck erschienen.

| M a t r i x | S a t z | A | B |
|-------------|---------|-----|---|
| 000 00 0 | 1 | 1 | 1 |
| 000 00 1 | 4 | 4 5 | 4 |
| 000 01 0 | 7 | 2 | 2 |
| 000 01 1 | 40 | 4 5 | 4 |
| 000 10 0 | 3 | 3 4 | 3 |
| 000 10 1 | 33 | 4 5 | 4 |
| 000 11 0 | 24 | 4 5 | 4 |
| 000 11 1 | 50 | 5 6 | 5 |
| 001 00 0 | 6 | 2 | 2 |
| 001 00 1 | 31 | 4 5 | 4 |
| 001 01 0 | 10 | 2 | 2 |
| 001 01 1 | 28 | 4 5 | 4 |
| 001 10 0 | 22 | 3 4 | 3 |
| 001 10 1 | 30 | 4 5 | 4 |
| 001 11 0 | 25 | 4 5 | 4 |
| 001 11 1 | 51 | 5 6 | 5 |
| 010 00 0 | 5 | 2 | 2 |
| 010 00 1 | 38 | 4 5 | 4 |
| 010 01 0 | 9 | 2 | 2 |
| 010 01 1 | 39 | 4 5 | 4 |
| 010 10 0 | 17 | 4 | 4 |
| 010 10 1 | 29 | 4 5 | 4 |
| 010 11 0 | 23 | 4 5 | 4 |
| 010 11 1 | 49 | 5 6 | 5 |

Matrix

Satz

A

B

| | | | | | |
|-----|----|---|----|-----|-----|
| 011 | 00 | 0 | 8 | 2 | 2 |
| 011 | 00 | 1 | 27 | 4 5 | 4 |
| 011 | 01 | 0 | 11 | 3 | 3 |
| 011 | 01 | 1 | 46 | 5 6 | 5 |
| 011 | 10 | 0 | 16 | 4 | 4 |
| 011 | 10 | 1 | 48 | 5 6 | 5 |
| 011 | 11 | 0 | 42 | 5 | 5 |
| 011 | 11 | 1 | 56 | 6 7 | 6 |
| 100 | 00 | 0 | 2 | 4 | 4 |
| 100 | 00 | 1 | 36 | 4 5 | 4 |
| 100 | 01 | 0 | 19 | 4 | 4 |
| 100 | 01 | 1 | 37 | 4 5 | 4 |
| 100 | 10 | 0 | 21 | 4 | 4 |
| 100 | 10 | 1 | 32 | 4 5 | 4 |
| 100 | 11 | 0 | 26 | 4 5 | 4 |
| 100 | 11 | 1 | 52 | 5 6 | 5 |
| 101 | 00 | 0 | 15 | 4 | 4 |
| 101 | 00 | 1 | 59 | 6 7 | 6 |
| 101 | 01 | 0 | 18 | 4 | 4 |
| 101 | 01 | 1 | 61 | 6 7 | 6 |
| 101 | 10 | 0 | 20 | 4 | 4 |
| 101 | 10 | 1 | 63 | 6 7 | 6 |
| 101 | 11 | 0 | 43 | 5 | 5 |
| 101 | 11 | 1 | 60 | 6 7 | 6 |
| 110 | 00 | 0 | 13 | 4 | 4 |
| 110 | 00 | 1 | 35 | 4 5 | 4 |
| 110 | 01 | 0 | 12 | 4 | 4 |
| 110 | 01 | 1 | 34 | 4 5 | 4 |
| 110 | 10 | 0 | 45 | 5 | 5 |
| 110 | 10 | 1 | 44 | 5 | 5 |
| 110 | 11 | 0 | 54 | 5 6 | 5 6 |
| 110 | 11 | 1 | 53 | 5 6 | 5 6 |
| 111 | 00 | 0 | 14 | 4 | 4 |
| 111 | 00 | 1 | 58 | 6 7 | 6 |
| 111 | 01 | 0 | 41 | 5 | 5 |
| 111 | 01 | 1 | 57 | 6 7 | 6 |
| 111 | 10 | 0 | 47 | 5 6 | 5 |
| 111 | 10 | 1 | 62 | 6 7 | 6 |
| 111 | 11 | 0 | 55 | 6 | 6 |
| 111 | 11 | 1 | 64 | 7 8 | 7 |