Ungerichtete Graphen und ihre Gerüste

Jiří Sedláček

In diesem Beitrag werden einige Ergebnisse des Verfassers zusammengefaßt, die in seinen Arbeiten [1], [2] und [3] enthalten sind. Es werden hier endliche ungerichtete Graphen und Multigraphen untersucht. Jeder Graph ist schlingenlos und hat nur einfache Kanten. In einem Multigraphen können auch mehrfache Kanten existieren. Mit $|M|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge M. Hat ein Graph G die Knotenpunktmenge U und die Kantenmenge K, so schreibt man $G = [U, K]$. Unter einem <u>Gerüst</u> des Graphen bzw. Multigraphen G versteht man einen maximalen in G enthaltenen Baum. Die Anzahl der Gerüste von G bezeichnen wir mit $k(G)$. Für einen Graphen G kann die Zahl $k(G)$ mit Hilfe der bekannten Determinantenmethode bestimmt werden.

I. Es sei n eine natürliche Zahl. Wir definieren eine endliche Menge A_n von natürlichen Zahlen auf folgende Weise: Es gilt $m \in A_n$ dann und nur dann, wenn ein Graph $G = [U, K]$ mit $|U| = n$, $k(G) = m$ existiert. Es ist z.B.

$$A_1 = A_2 = \{1\}\ ,\quad A_3 = \{1,\ 3\}\ ,\quad A_4 = \{1,\ 3,\ 4,\ 8,\ 16\}\ ,$$
$$A_5 = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 16,\ 20,\ 21,\ 24,\ 40,\ 45,\ 75,\ 125\}\ .$$

Man sieht leicht, daß $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \neq A_{n+1}$ für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt. Ist $n \geq 3$, dann setzen wir $A_n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r\}$ wobei $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_r$. Es ist $x_1 = 1$ und $x_i = i + 1$ für $2 \leq i \leq n - 1$. Es gilt ferner $x_r = n^{n-2}$ (nach der bekannten Caleyschen Formel). Für $n \geq 8$ können die Zahlen $x_{r-1}, x_{r-2}, x_{r-3}, \ldots$ in folgenden Formeln ausgedrückt werden:

$$x_{r-1} = (n-2)\, n^{n-3},$$
$$x_{r-2} = (n-2)^2 n^{n-4},$$
$$x_{r-3} = (n-1)(n-3)\, n^{n-4},$$
$$x_{r-4} = (n-2)^3 n^{n-5},$$
$$x_{r-5} = (n-3)(n-2)(n-1)\, n^{n-5},$$
$$x_{r-6} = (n-2)(n^2-4n+2)n^{n-5},$$
$$x_{r-7} = (n-3)^2 n^{n-4},$$
$$x_{r-8} = (n-4)(n-1)^2\, n^{n-5},$$
$$x_{r-9} = (n-2)^4\, n^{n-6}\ .$$

Es entsteht natürlich die Frage, wie die Zahl $r = |A_n|$ von der Zahl n abhängt. Mit wachsendem n wächst die Zahl r schnell; es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A_n|}{n} = \infty.$$

II. Jetzt werden wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines speziellen Gerüstes in einem zusammenhängenden Graphen $G = [U, K]$ aufstellen. Dazu brauchen wir zwei Bezeichnungen. Es sei $x \in U$. Mit $\rho(x,G)$ bezeichnen wir den Grad von x (bezüglich des Graphen G). Ferner bedeute $\alpha(x,G)$ die Anzahl der den Knotenpunkt x enthaltenden Glieder des Graphen G. In der Literatur wird der Begriff eines Gliedes in der Regel nur für zusammenhängende Graphen mit mindestens einer Kante definiert. Dann gilt

$$\alpha(x,G) \leq \rho(x,G).$$

Es sei s eine natürliche Zahl. Es existiert ein Gerüst H von G mit $\rho(x,H) = s$ dann und nur dann, wenn folgende Ungleichung gilt:

$$\alpha(x,G) \leq s \leq \rho(x,G).$$

III. Es sei G ein Graph mit n Knotenpunkten und mit der chromatischen Zahl $c \geq 2$. Folgende Abschätzung kann bewiesen werden:

$$k(G) \leq n^{n-2}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{n-c}.$$

IV. Es sei $B = [U, K]$ ein Baum mit s Knotenpunkten, der in einem vollständigen Graphen V_n mit n Knotenpunkten als sein Teilgraph enthalten ist. Es soll die Anzahl der Gerüste von V_n bestimmt werden, die den Baum B enthalten. Man kann zeigen, daß diese Anzahl gleich der Zahl sn^{n-s-1} ist. Man beachte, daß dieses Ergebnis von der Zahl s, aber nicht von der Struktur des Baumes B abhängt.

V. Nun möchten wir zeigen, daß die in der Zahlentheorie bekannten Lucas'schen Zahlen auch in der Graphentheorie eine gewisse Rolle spielen. Es sei $z^2 - Lz + M = 0$ eine Gleichung mit ganzen Koeffizienten $L > 0$, M und mit den Wurzeln α, β, wobei $\alpha \neq \beta$ ist. Dann versteht man unter einer Lucas'schen Zahl die Zahl

$$L_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}.$$

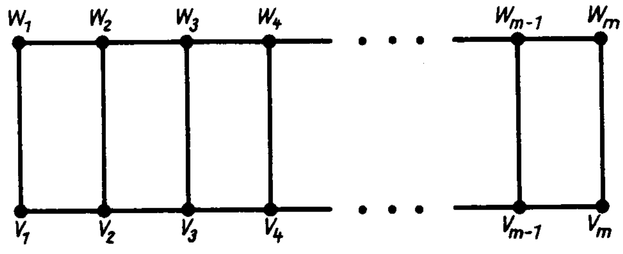

Abb. 1

Abb. 1 zeigt einen Graphen G_m, der die Form einer Leiter hat. Dabei bedeutet m die Anzahl ihrer "senkrechten" Kanten. Man kann zeigen, daß folgende Gleichung gilt:

$$k(G_m) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^m - (2 - \sqrt{3})^m \right).$$

VI. Ein Multigraph heißt plättbar, wenn er sich auf der Ebene zeichnen läßt, ohne daß sich seine Kanten überschneiden. In der Literatur werden oft zwei duale plättbare Multigraphen untersucht - siehe z.B. [4]. Es seien M_1, M_2 zwei zusammenhängende duale plättbare schlingen- und brückenlose Multigraphen. Man kann zeigen, daß folgendes gilt:

$$k(M_1) = k(M_2).$$

VII. Schließlich möchten wir eine offene Frage formulieren, die mit dem bekannten Begriff eines selbstkomplementären Graphen zusammenhängt. Ein Graph heißt selbstkomplementär, wenn er mit seinem Komplement isomorph ist. Derartige Graphen wurden vor kurzer Zeit von R.C. READ, G. RINGEL, H. SACHS und B. ZELINKA untersucht. Unsere Frage lautet nun wie folgt: Offensichtlich können zwei komplementäre Graphen G_1 und G_2 mit derselben Anzahl von Gerüsten angegeben werden. Es genügt, für G_1 einen selbstkomplementären Graphen zu wählen. Es ist mir nicht gelungen, zwei nichtisomorphe komplementäre Graphen G_1, G_2 mit $k(G_1) = k(G_2)$ zu finden.

Literatur

[1] Sedláček, J.: Finite graphs and their spanning trees, Časopis pro pěstování matematiky (im Druck).

[2] Sedláček, J.: O kostrách konečných grafů (On the spanning trees of finite graphs), Časopis pro pěstování matematiky 91 (1966), 221-227.

[3] Sedlácek, J.: O počtu koster konečných grafů (On the number of spanning trees of finite graphs), Časopis pro pěstování matematiky (im Druck).

[4] Berge, C.: Théorie des graphes et ses applications, Paris 1958.

[5] Sachs, H.: Über selbstkomplementäre Graphen, Publ. Math. Debrecen 9 (1962), 270-288.

[6] Fiedler, M.; Sedláček, J.: O W-basích orientovaných grafů (Über Wurzelbasen von gerichteten Graphen), Časopis pro pěstování matematiky 83 (1958), 214-225.

[7] Rotkiewicz, A.: On Lucas numbers with two intrinsic prime divisors, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, X.(1962), 229-232.

[8] Trent, H.M.: A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. Math. Acad. Sci. USA 40 (1954), 1004-1007.