Über die Einbettung von Graphen in zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten kleinsten Geschlechts

Walter Vollmerhaus

Im folgenden sei G stets ein endlicher Graph, von dem wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß er keine Punkte der Ordnung null oder eins, keine Mehrfachstrecken und keine Schlingen enthält.
M sei stets eine kombinatorisch gegebene, endliche, orientierbare, zweidimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit. [1]

D e f i n i t i o n 1: Das Tripel (G, φ, M) heißt <u>Einbettung von G in M</u>, wenn φ ein Isomorphismus von G in den Streckenkomplex S von M ist.

D e f i n i t i o n 2: Zwei Einbettungen (G, φ_1, M_1) und (G, φ_2, M_2) von G in M_1 bzw. M_2 heißen <u>äquivalent</u>, wenn es einen Homoeomorphismus h von M_1 in M_2 gibt, der das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
S_1 \arrow[rr, "h"] & & S_2
\end{tikzcd}
$$

kommutativ macht.

Es ist klar, daß jeder endliche Graph sich in Mannigfaltigkeiten hinreichend großen Geschlechts einbetten läßt. Wir definieren daher:

D e f i n i t i o n 3: Das <u>Geschlecht $g(G)$ des Graphen G</u> ist die kleinste nicht negative ganze Zahl mit der Eigenschaft, daß G in eine Mannigfaltigkeit M mit dem Geschlecht $g(G)$ einbettbar ist.

D e f i n i t i o n 4: Eine Einbettung (G, φ, M) heißt <u>minimale Einbettung</u> von G, wenn $g(M) = g(G)$ ist.

An Beispielen erkennt man leicht, daß ein Graph mehrere nicht äquivalente minimale Einbettungen besitzen kann.
Man kann nun zeigen:

<u>Satz 1:</u> Ist (G, φ, M) eine minimale Einbettung von G in M, so zerlegt G die Mannigfaltigkeit M in elementare Flächenstücke.

A n m e r k u n g: Diese Zerlegung ist nicht notwendig eine Zerlegung von M in 2-Zellen.

Wir definieren weiter:

D e f i n i t i o n 5: Ein Graph G heißt <u>irreduzibel</u>, wenn durch Entfernen einer beliebigen Strecke von G ein Graph entsteht, dessen Geschlecht kleiner ist als das von G.

Für jede nicht negative ganze Zahl p bezeichnen wir mit J_p die Menge der irreduziblen Graphen vom Geschlecht p.

Man kann nun leicht folgendes beweisen:

<u>Satz 2:</u> Ein Graph G hat genau dann das Geschlecht p, wenn er einen Teilgraph T enthält, der zu J_p gehört, aber keinen Teilgraph T' enthält, der zu J_{p+1} gehört.

KURATOWSKI [2] hat ein Kriterium dafür angegeben, wann ein Graph das Geschlecht null hat. Er hat nämlich folgenden Satz bewiesen:

<u>Satz 3:</u> Ein Graph G hat genau dann das Geschlecht null, wenn er keinen zu $K_{3,3}$ oder K_5 homoeomorphen Teilgraph enthält.

Zusammen mit Satz 2 folgt hieraus:

<u>Satz 4:</u> J_1 besteht aus zwei Homoeomorphieklassen, nämlich aus den zu $K_{3,3}$ oder K_5 homoeomorphen Graphen.

Dieser Satz läßt sich verallgemeinern zu

Satz 5: Für jede natürliche Zahl p besteht J_p aus endlich vielen Homoeomorphieklassen.

Dieser Satz wird durch vollständige Induktion nach p bewiesen.

Der Beweis soll im folgenden kurz skizziert werden:

Für $p = 1$ folgt Satz 5 aus Satz 4.
Für die folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, daß Satz 5 für die natürliche Zahl p bereits bewiesen ist.
G sei ein Graph, und es sei $g(G) \geq p$. Wir wollen zunächst zwei notwendige Bedingungen dafür herleiten, daß G das Geschlecht p hat: Nach Satz 2 enthält G einen Teilgraph T aus J_p. T_o sei der zu T homoeomorphe Graph, der keinen Punkt der Ordnung zwei enthält. Wir definieren folgende Graphen:

a) $G - T$: $G - T$ entsteht aus G durch Entfernen von T und aller Kanten, die mit einem Punkt von T inzidieren.

b) Es gibt eine eindeutig bestimmte ganze Zahl k mit der Eigenschaft, daß $G - T$ in k durchschnittsfremde, zusammenhängende Komponenten zerfällt: $G - T = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

c) G_i^* ist der Teilgraph von G, der aus G_i und allen Kanten samt ihren Endpunkten besteht, die von G_i ausgehen und in irgendeinem Punkt von T enden.

d) G_i^o entsteht aus G_i, indem man alle Punkte von G_i^*, die zu T gehören, miteinander identifiziert.

e) Es ist $(G - T)^o = \bigcup_{i=1}^{k} G_i^o$.

Sei nun $g(G) = p$. Offensichtlich induziert jede minimale Einbettung von G in M eine minimale Einbettung von T und T_o in M. Nach Satz 1 liefert jede solche Einbettung eine Zerlegung von M in elementare Flächenstücke durch die Kanten von T_o. Die Teilgraphen G_i^* sind in diese Flächenstücke eingebettet. Hieraus folgt:

Hilfssatz 1: Hat G das Geschlecht p, so hat $(G - T)^o$ das Geschlecht null.

Weiter läßt sich zeigen:

<u>Hilfssatz 2:</u> Es gibt eine natürliche Zahl $k(p)$ mit der Eigenschaft: Hat G das Geschlecht p, so gibt es höchstens $k(p)$ Teilgraphen G_i^* von G, die jeweils mit mindestens drei Kanten von T_o innere Punkte gemeinsam haben.

Mit J'_{p+1} bezeichnen wir die Teilmenge der Graphen G von J_{p+1}, für die folgendes richtig ist: G besitzt einen Teilgraph T aus J_p mit der Eigenschaft, daß das Geschlecht von $(G - T)^o$ größer als null ist. Aus Hilfssatz 1 folgert man leicht:

<u>Hilfssatz 3:</u> J'_{p+1} zerfällt in endlich viele Homoeomorphieklassen.

Sei nun G ein Graph aus $J_{p+1} - J'_{p+1}$, T ein Teilgraph von G aus J_p und T_o der zu T homoeomorphe Graph, der keinen Punkt der Ordnung zwei enthält. Aus Hilfssatz 2 folgt:

<u>Hilfssatz 4:</u> Es gibt höchstens $k(p) + 1$ Teilgraphen G_i^* von G, die jeweils mit mindestens drei Kanten von T_o innere Punkte gemeinsam haben.

Durch detaillierte kombinatorische Überlegungen lassen sich die folgenden beiden Hilfssätze beweisen:

<u>Hilfssatz 5:</u> Es gibt eine natürliche Zahl $l(p+1)$ mit der Eigenschaft, daß höchstens $l(p+1)$ Teilgraphen G_i^* von G jeweils mit höchstens zwei Kanten von T_o innere Punkte gemeinsam haben.

<u>Hilfssatz 6:</u> Es gibt eine natürliche Zahl $m(p+1)$ mit der Eigenschaft, daß von irgendeinem der Teilgraphen G_i^* von G höchstens $m(p+1)$ Kanten ausgehen, deren Endpunkte auf einer Kante von T_o liegen.

Mit Hilfe des von HOTZ in [3] angegebenen Einbettungsverfahrens folgert man:

<u>Hilfssatz 7:</u> Zwei Kreise eines der Teilgraphen G_i^* von G haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Aus den Hilfssätzen 6 und 7 und der Induktionsannahme folgt:

<u>Hilfssatz 8:</u> Es gibt eine natürliche Zahl $n(p+1)$ mit der Eigenschaft, daß die Teilgraphen G_i^* von G höchstens $n(p+1)$ Punkte enthalten, deren Ordnung größer als zwei ist.

Aus den Hilfssätzen 4 und 5 folgt dann weiter:

<u>Hilfssatz 9:</u> $J_{p+1} - J'_{p+1}$ zerfällt in endlich viele Homoeomorphieklassen.

Die Hilfssätze 3 und 9 zeigen, daß Satz 5 auch für $p+1$ richtig ist.

Eine ausführliche Darstellung des oben skizzierten Beweises erscheint demnächst in [4]. Dort werden auch explizite algebraische Ausdrücke für $k(p)$, $l(p)$, $m(p)$ und $n(p)$ angegeben.

Literatur

[1] Reidemeister, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie. F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1951.

[2] Kuratowski, C.: Sur le problème des courbes gauches en Topologie. Fundamenta Math. 15, 271-283 (1930).

[3] Hotz, G.: Einbettung von Streckenkomplexen in die Ebene. Math. Ann. 167, 241-223 (1966).

[4] Vollmerhaus, W.: Über die Einbettung von Graphen in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten kleinsten Geschlechts. Erscheint demnächst in Math. Ann.