Fastplättbare Graphen

Klaus Wagner

Im folgenden werden ungerichtete, "schlichte" Graphen (also ohne Schlingen und ohne Doppelkanten) betrachtet. Nach einem Satz von C. Kuratowski ist ein endlicher Graph G genau dann plättbar, wenn er die beiden (Kuratowski'schen) Bedingungen erfüllt:

1. G enthält keine Unterteilung des (vollständigen) K_5,
2. G enthält keine Unterteilung des (vollständigen, bipartite) $K_{3,3}$.

DIRAC-SCHUSTER haben bewiesen (vgl. Proc. of the Nederl. Ak. Wet., Ser. A 57 (1954), 343-348), daß die beiden Kuratowski'schen Bedingungen auch noch für abzählbare Graphen notwendig und hinreichend für die Plättbarkeit sind.

Wann ist aber ein beliebiger Graph G plättbar? Es gilt:

<u>Satz 1:</u> Ein Graph G ist genau dann plättbar, wenn er die folgenden vier Bedingungen erfüllt:
1. und 2. die obigen Kuratowski'schen Bedingungen,
3. G enthält höchstens kontinuum viele Ecken,
4. G enthält höchstens abzählbar viele Ecken mit einem Grad ≥ 3.

Entfernt man aus irgend einem endlichen, nicht plättbaren Graphen G sukzessive Kanten oder (übrig gebliebene) einzelne Ecken, wobei die hierbei entstehenden Teilgraphen von G immer wiederum nicht plättbar sein sollen, so erhält man am Ende einer solchen Reduktion nach dem Satz von Kuratowski immer entweder eine Unterteilung des K_5 oder eine Unterteilung des $K_{3,3}$. Wir fragen ähnlich, welche Graphen erhält man am Ende der folgenden Reduktion: Man entferne aus G sukzessive <u>Sterne</u> (d.h. einzelne Ecken von G samt der jeweils an diesen Ecken anstoßenden Kanten von G), wobei die hierbei entstehenden Teilgraphen von G immer wiederum nicht plättbar sein sollen. Solche im Sinne dieser Reduktion minimalen Graphen haben offenbar die beiden folgenden Eigenschaften:

1. G ist nicht plättbar,
2. $G - s_p$ ist plättbar, welche Ecke p von G man hierbei auch

wählen mag, unter s_p den Stern von G mit dem Zentrum p verstanden (also p samt aller an p anstoßenden Kanten von G sollen gestrichen werden).
Wir nennen einen Graphen G fastplättbar, wenn er diese Eigenschaften 1. und 2. besitzt. Man sieht ohne weiteres, daß alle Kuratowski'schen Graphen (d.h. alle Unterteilungen von K_5 und alle Unterteilungen von $K_{3,3}$) fastplättbar sind.

Offenbar kann man den Satz von Kuratowski auch so aussprechen, daß jeder endliche, kanten-minimale, nicht plättbare Graph ein Kuratowski'scher Graph ist. Was kann man über die stern-minimalen, nicht plättbaren (d.h. über die fastplättbaren) Graphen aussagen? Kann man (ähnlich wie bei dem Kuratowski'schen Satz) auch alle fastplättbaren Graphen bestimmen? Diese Frage wird positiv beantwortet.

Satz 2: Die folgenden unter (1 - 5) genannten Graphen und nur diese sind fastplättbar:
1. die Kuratowski'schen Graphen,
2. jeder auf einem Möbius'schen Band M liegende Graph, der den Rand von M als Hamilton'sche Linie besitzt und mindestens drei ecken-disjunkte nicht auf dem Rand von M liegende Kanten enthält,
3. der Würfelgraph mit den beiden Diagonalen auf einer seiner Seitenflächen mit Hinzunahme noch entweder von zwei weiteren Diagonalen oder von einer oder keiner Diagonalen auf der gegenüberliegenden Seitenfläche,
4. jeder nicht plättbare Graph G, der sich aus einem Weg W und einem zu W disjunkten Kreis C und nur noch aus solchen Kanten zusammensetzen läßt, die jeweils eine beliebige Ecke von C mit einem beliebigen Endpunkt von W verbinden. Schließlich:
5. Jeder der folgenden 4 Graphen G_{1-4}, sowie höchstens noch solche Graphen, die sich durch die beiden folgenden Prozesse (eventuell mehrmals nacheinander ausgeführt) auf einen dieser

Graphen G_{1-4} reduzieren lassen: Ecken vom Grad 2 dürfen gelöscht werden (d.h. die beiden an einer Ecke vom Grad 2 anstoßenden Kanten dürfen zu einer Kante vereinigt werden); an heder Ecke vom Grad 3 darf eine der 3 anstoßenden Kanten gelöscht werden. Die 4 genannten Graphen sind:

G_1: Man nehme in der x,y-Ebene drei "übereinander liegende" Rechtecke V_i $(i = 1,2,3)$ mit den Ecken $A_i = (0,i)$, $A_{i+1} = (0,i+1)$, $B_i = (2,i)$, $B_{i+1} = (2,i+1)$, unterteile die (horizontalen) Kanten $A_i\, B_i$ $(i = 1,\ldots,4)$ durch ihre Mittelpunkte $C_i = (1,i)$, verbinde jedes C_i $(i = 1,2,3)$ in V_i mit den beiden Ecken A_{i+1} und B_{i+1} durch zwei weitere Kanten und setze schließlich die Grundseite von V_1 mit der oberen Seite von V_3 nach Art eines Möbius'schen Bandes zusammen (man identifiziere also $A_1 = B_4$, $B_1 = A_4$, $C_1 = C_4$).

G_2: Man unterteile in einem Prisma P die gemeinsame Kante zweier Vierecke V_1 und V_2 von P durch eine Ecke p, verbinde p mit den beiden gegenüberliegenden Ecken von V_1 durch zwei Kanten und nehme in V_2 noch die beiden Diagonalen als zwei weitere Kanten hinzu.

G_3: Man adjungiere zu einem Prisma P eine nicht auf P liegende Ecke und verbinde diese mit jeder Ecke von P durch eine Kante.

G_4: Man verbinde eins der beiden (unverbundenen) Eckentripel des $K_{3,3}$ durch 3 Kanten (man adjungiere also ein Dreieck zu $K_{3,3}$).

Es sei noch darauf hingewiesen, daß aus Satz 1 leicht folgt, daß jeder fastplättbare Graph notwendig endlich ist. Weiter werde (ohne Beweis) mitgeteilt:

<u>Satz 3</u>: Die chromatische Zahl eines jeden fastplättbaren Graphen ist höchstens 5. Sie ist gleich 5 genau für die Graphen $G = K_2 * C_n$ mit ungeradem $n \geq 3$ und nur für diese fastplättbaren Graphen (vgl. die im Satz 2 unter 4. genannten Graphen;

C_n = Kreis mit n Ecken; K_2 = Kante mit ihren Endpunkten; K_2 und C_n sollen disjunkt sein; * bedeutet, daß jede der beiden Ecken von K_2 mit jeder Ecke von C_n durch eine Kante zu verbinden ist).

Im übrigen sei auf eine unter dem gleichen Titel im Journal of Combinatorial Theory erscheinende Arbeit verwiesen.