Eine Methode zur Konstruktion von kanten-p-kritischen Graphen

Walter Wessel

Wir betrachten endliche ungerichtete Graphen G ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten.

Man sagt, eine Menge M von Punkten von G repräsentiert G, wenn jede Kante von G in mindestens einem dieser Punkte endet. Ein Graph G wird kanten-p-kritisch genannt (vgl. [1]), wenn p die Minimalzahl von Punkten ist, die G repräsentieren, und wenn nach Entfernen einer beliebigen Kante $p-1$ Punkte dazu genügen. Z.B. ist der vollständige Graph K_n mit n Punkten kanten-(n-1)-kritisch und der Kreis C_{2a-1} mit $2a-1$ Punkten kanten-a-kritisch.

Die Minimal- bzw. die Maximalzahl der Kanten eines kanten-p-kritischen Graphen bei gegebenem p und gegebener Zahl der Punkte des Graphen kann man der bekannten Arbeit von TURAN von 1941 [2] bzw. einer Arbeit von ERDŐS, HAJNAL und MOON von 1964 [1] entnehmen. In diesen Arbeiten sind die Extremalzahlen für die Komplementärgraphen der kanten-p-kritischen Graphen angegeben.

Die folgenden Bemerkungen sind dem Problem gewidmet, sämtliche kanten-p-kritischen Graphen anzugeben. Es ist klar, daß man sich dabei auf die Bestimmung sämtlicher zusammenhängenden kanten-p-kritischen Graphen beschränken kann. Denn jede zusammenhängende Komponente G_i $(i = 1, \ldots, k)$ eines aus k Komponenten bestehenden kanten-p-kritischen Graphen G ist notwendig kanten-p_i-kritisch mit $0 \leq p_i \leq p$ und $\sum_{i=1}^{k} p_i = p$, wie man sich leicht überlegt.

In einer vor kurzem erschienenen Veröffentlichung [3] gibt Michael D.PLUMMER eine Methode zur Gewinnung einer unendlichen Klasse von kanten-p-kritischen Graphen an. Er geht von den vollständigen Graphen K_n aus und erhält durch eine wiederholte Operation weitere kritische Graphen. Er gewinnt u.a. alle derartigen Graphen mit weniger als 8 Punkten, unabhängig von p.

Ausgangspunkte der hier zu beschreibenden Methode sind die Kreise C_n mit n Punkten.
Ist C_n Teilgraph eines Graphen G, so heißt C_n sehnenlos in G, wenn in G keine Kante zwischen zwei Punkten von C_n existiert, die nicht zu C_n gehört.

Wir klassifizieren die kanten-p-kritischen Graphen nach den längsten sehnenlosen Kreisen, die in ihnen als Teilgraphen enthalten sind.

Mittels geeigneter Hilfssätze (von denen einige unten angegeben sind) kann man sukzessive die Graphen jeder Klasse bestimmen. Der Aufwand dabei wächst mit p, doch erweist sich die jeweilige Vorgabe des längsten sehnenlosen Kreises als Teilgraphen als starke Voraussetzung, so daß sich z.B. sämtliche kanten-p-kritischen Graphen mit $2 \leq p \leq 6$ relativ schnell finden lassen, unter diesen alle von PLUMMER explizit angegebenen Graphen.

Nachstehend einige Hilfssätze und Teilergebnisse:

<u>Hilfssatz 1:</u> Jeder Punkt eines zusammenhängenden kanten-p-kritischen ($p \geq 2$) Graphen hat mindestens den Grad 2.

<u>Hilfssatz 2:</u> Sei C_n ein Kreis der Länge n. s Punkte $P_1, \ldots, P_s$ von C_n zerlegen C_n in s Wege. s' dieser Wege mögen ungerade Länge haben. Dann gilt $s' \equiv n(2)$ und: Falls $P_1, \ldots, P_s$ zu einer Menge M von Punkten von C_n gehören, die C_n repräsentieren, so hat M mindestens die Mächtigkeit $\frac{n+s'}{2}$.

<u>Hilfssatz 3:</u> Der längste sehnenlose Kreis eines kanten-p-kritischen Graphen hat höchstens die Länge $2p-1$.

<u>Hilfssatz 4:</u> Es gibt keinen kanten-p-kritischen Graphen mit einem längsten sehnenlosen Kreis der Länge $2p-4$ oder $2p-2$.

Der einzige kanten-p-kritische Graph mit einem längsten sehnenlosen Kreis der Länge $2p-1$ ist offenbar dieser Kreis selbst; der einzige kanten-p-kritische Graph mit einem längsten sehnenlosen Kreis der Länge 3 ist der vollständige Graph K_{p+1} mit $p+1$ Punkten. Außerdem gilt:

Satz: Die Menge der kanten-p-kritischen Graphen mit einem längsten sehnenlosen Kreis der Länge $2p-3$ ist identisch mit der Menge der Graphen, die aus einem Kreis von dieser Länge und einem weiteren Punkt bestehen, der mit drei solchen Punkten des Kreises durch eine Kante verbunden ist, die den Kreis in drei Wege ungerader Länge zerlegen. Es gibt (bis auf Isomorphie) genau

$$\sum_{i=0}^{[\frac{p-1}{3}]} \left[\frac{p-3i-1}{2}\right]$$

verschiedene solche Graphen.

Z.B. kanten-6-kritisch mit einem längsten sehnenlosen Kreis der Länge 9 sind also genau folgende Graphen:

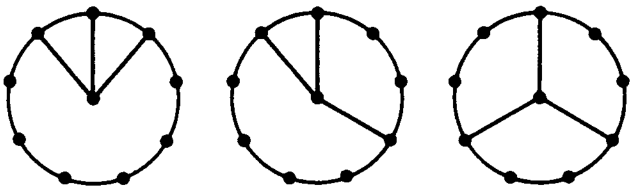

Abb. 1

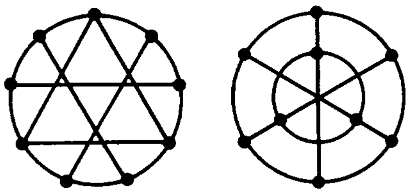

Abb. 2

Der rechte Graph ist der kleinste (Minimalzahl an Punkten) kritische Graph ohne Hamiltonsche Linie.

Erwähnt sei, daß sich Hilfssatz 4 nicht auf $2p-6$ erweitern läßt, denn der folgende (in zwei isomorphen Darstellungen angegebene)

Graph ist kanten-6-kritisch und enthält als längsten sehnenlosen Kreis einen solchen mit der Länge 6.
Dies ist der kleinste kritische Graph, dessen längster sehnenloser Kreis gerade Länge hat.

Folgende Tabelle gibt (bis auf Isomorphie) die Anzahlen der verschiedenen kritischen Graphen in jeder Klasse bis p = 6 an (l = Länge des längsten sehnenlosen Kreises, der Teilgraph des betreffenden Graphen ist):

p \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
2	1								
3	1	-	1						
4	1	-	1	-	1				
5	1	-	4	-	2	-	1		
6	1	-	10	1	15	-	3	-	1

Literatur

[1] Erdős, P.; Hajnal, A.; Moon, J.W.: A problem in graph theory. Amer.math.Monthly 71(1964), 1107-1110.

[2] Turán, P.: Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. Mat.Fiz.Lapok 48(1941), 436-452; siehe On the theory of graphs. Colloq.Math. 3(1954), 19-30.

[3] Plummer, M.D.: On a family of line-critical graphs. Monatsh.Math. 71(1967), 40-48.