Über ein Färbungsproblem auf der Kugel

Kurt Hauschild

Im folgenden wird eine hinreichende Bedingung angegeben dafür, daß sich die Länder einer normalen Landkarte mit vier Farben zulässig färben lassen; daraus ergibt sich eine hinreichende Bedingung dafür, daß sich in einer Landkarte, die lokalregulär vom Grad vier ist, die Länder mit vier Farben in der Weise färben lassen, daß zwei Länder bereits dann verschiedene Farben erhalten, wenn sie einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen (das geht, wie RINGEL gezeigt hat, im allgemeinen erst mit sechs Farben).

Die Terminologie ist dieselbe wie in [1]; zusätzlich möchte ich verabreden, daß mit "Landkarten" grundsätzlich endliche Landkarten auf der Kugel gemeint sind, d.h. endliche, schlingenlose, brückenlose, zusammenhängende plättbare Graphen ohne Mehrfachkanten, bei denen jeder Knotenpunkt mindestens den Grad drei hat.

Grundlegend für alles Weitere ist der folgende bekannte Satz, der hier nicht vorbewiesen wird.

Satz 1: In einer Landkarte, in der jeder Knotenpunkt geraden Grad hat, und in der jedes Land ein Dreieck ist, lassen sich die Knotenpunkte mit drei Farben färben derart, daß benachbarte Knotenpunkte verschiedene Farben erhalten.

Die beiden folgenden Sätze haben den Charakter von Hilfssätzen.

Satz 2: Es sei $\mathfrak{L}$ eine Landkarte, in der jeder Knotenpunkt geraden Grad hat, und in der jedes Land eine durch drei teilbare Anzahl von Eckpunkten hat. Dann läßt sich $\mathfrak{L}$ durch Einfügen neuer Kanten zu einer Landkarte $\mathfrak{L}'$ ergänzen, in der jeder Knotenpunkt ebenfalls geraden Grad hat, und in der jedes Land ein Dreieck ist.

B e w e i s : Es seien P_1, P_2, $P_3, \ldots$, P_{3n-1}, P_{3n}, $P_{3n+1} = P_1$ die Eckpunkte eines $3n$-ecks. Wir fügen Kanten P_1P_3, P_1P_5, P_1P_6, $P_1P_8, \ldots$, P_1P_{3m}, $P_1P_{3m+2}, \ldots$, $P_1P_{3(n-1)+2} = P_1P_{3n-1}$ ein und außerdem Kanten P_3P_5, $P_6P_5, \ldots$, $P_{3m}P_{3m+2}, \ldots$, $P_{3(n-1)}P_{3n-1}$ (vgl. Abb. 1 für $n = 3$; die eingefügten Kanten sind gestrichelt gezeichnet).

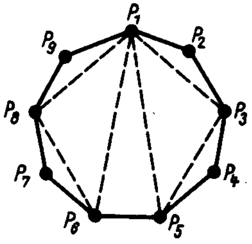

Abb. 1

Nach dem Einfügen dieser Kanten befinden sich im Inneren des Polygonzuges $P_1, P_2, \ldots$, P_{3n}, $P_{3n+1} = P_1$ nur noch Dreiecke, und jeder Knotenpunkt hat nach wie vor geraden Grad. In dieser Weise verfahren wir mit jedem Land von $\mathfrak{L}$. Die entstehende Landkarte $\mathfrak{L}'$ hat offenbar die verlangte Eigenschaft. q.e.d.

Satz 3: Es sei $\mathfrak{L}$ eine Landkarte, in der jeder Knotenpunkt geraden Grad hat, und in der jedes Land eine durch drei teilbare Anzahl von Eckpunkten hat. Dann lassen sich die Knotenpunkte von $\mathfrak{L}$ mit drei Farben derart färben, daß die Färbung längs der Peripherie eines jeden Landes zyklisch von der Ordnung drei ist.

B e w e i s : Wir gehen von $\mathfrak{L}$ über zur Landkarte $\mathfrak{L}'$, wie sie im Beweis von Satz 2 konstruiert wurde. Die Knotenpunkte von $\mathfrak{L}'$ lassen sich auf Grund von Satz 1 mit drei Farben 0, 1, 2 derart färben, daß benachbarte Knotenpunkte verschiedene Farben erhalten. $\mathfrak{F}$ sei eine derartige Färbung; mit $\mathfrak{F}(P)$ bezeichnen wir die Farbe des Punktes P. Wir übernehmen diese Färbung der Knotenpunkte für $\mathfrak{L}$; zu zeigen ist, daß sie das Verlangte leistet.
P_1, $P_2, \ldots$, P_{3n}, $P_{3n+1} = P_1$ mögen die Eckpunkte eines Landes

von $\mathfrak{L}$ sein, und die eingefügten Kanten mögen o.B.d.A. gewählt sein wie im Beweis von Satz 2. O.B.d.A. sei $\mathfrak{F}(P_1) = 0$. Dann ist notwendigerweise o.B.d.A. $\mathfrak{F}(P_3) = \mathfrak{F}(P_6) = \ldots = \mathfrak{F}(P_{3m}) = \ldots =$ $\mathfrak{F}(P_{3(n-1)}) = 1$, $\mathfrak{F}(P_5) = \mathfrak{F}(P_8) = \ldots = \mathfrak{F}(P_{3m+2}) = \ldots = \mathfrak{F}(P_{3n-1}) = 2$, denn in $\mathfrak{L}'$ müssen die einem Punkte benachbarten Punkte offenbar alternierend gefärbt sein mit denjenigen zwei Farben, die jenem Punkte nicht zugeordnet sind. Daraus folgt $\mathfrak{F}(P_2) = 2$, $\mathfrak{F}(P_{3n}) = 1$, $\mathfrak{F}(P_4) = \ldots = \mathfrak{F}(P_{3m+1}) = \ldots = \mathfrak{F}(P_{3n-2}) = 0$. Die Punkte $P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5\ P_6 \ldots$ sind also der Reihe nach gefärbt mit $0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$, und es liegt in der Tat eine zyklische Färbung der Ordnung drei vor. q.e.d.

Im folgenden geht es um normale Landkarten, bei denen ein Faktor ersten Grades gegeben ist. Die zum Faktor gehörenden Kanten sollen "rote Kanten", die übrigen "blaue Kanten" heißen.

Satz 4: In einer normalen Landkarte $\mathfrak{L}$ mit gegebenem Faktor ersten Grades sei die Anzahl der blauen Kanten, die ein beliebiges Land begrenzen, durch drei teilbar. Dann lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben zulässig färben.

B e w e i s : Wir gehen von $\mathfrak{L}$ über zu einer Landkarte $\mathfrak{L}'$, die aus $\mathfrak{L}$ dadurch entsteht, daß wir Knotenpunkte, die durch eine rote Kante verbunden sind, identifizieren (vgl. Abb. 2).

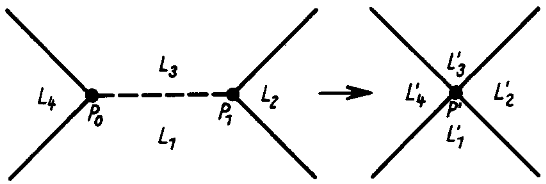

Abb. 2

Die Landkarte $\mathfrak{L}'$ ist lokalregulär vom Grad vier, und jedes Land hat eine durch drei teilbare Eckenzahl. Auf Grund von Satz 3 existiert eine Färbung der Knotenpunkte von $\mathfrak{L}'$ mit drei Farben $0, 1, 2$, die den dort angeführten Bedingungen genügt. Wir wählen eine solche und gehen über zu einer Färbung der Knotenpunkte von $\mathfrak{L}'$

mit 0,1,2, indem wir jedem der Knotenpunkte von $\mathfrak{L}$ die Farbe seines Bildpunktes in $\mathfrak{L}'$ zuordnen; solcherweise erhalten benachbarte Knotenpunkte von $\mathfrak{L}$ genau dann die gleiche Farbe, wenn sie durch eine rote Kante verbunden sind. Es sei P_o ein Punkt von $\mathfrak{L}$, und P_1, P_2, P_3 seien die ihm benachbarten Punkte; ich zeige, daß P_1, P_2, P_3 paarweise verschieden gefärbt sind. Genau eine der Kanten P_oP_1, P_oP_2, P_oP_3 ist rot, o.B.d.A. sei dies P_oP_1. Dies bedeutet, daß P_1 ebenso gefärbt ist wie P_o, also gewiß anders als P_2 oder P_3. Des weiteren sind die Bildpunkte von P_o, P_2 und P_3 in $\mathfrak{L}'$ aufeinanderfolgende Eckpunkte eines Landes, also paarweise verschieden gefärbt. Somit ergibt sich, daß P_1, P_2, P_3 in der Tat paarweise verschieden gefärbt sind. Nunmehr ordnen wir jeder Kante von $\mathfrak{L}$ die Summe der Eckpunktfarben, genommen modulo drei, zu (sind beispielsweise die Punkte P_o, P_1, P_2, P_3 der Reihe nach mit 1, 1, 0, 2 gefärbt, so erhalten die Kanten P_oP_1, P_oP_2, P_oP_3 der Reihe nach die Farben 2, 1, 0). Auf Grund des Vorangegangenen erhalten bei dieser Färbung irgend zwei Kanten, die einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen, verschiedene Farben. Nach dem Satz von Tait folgt daraus, daß sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben zulässig färben lassen. q.e.d.

Als Illustration für die Anwendungsfähigkigkeit von Satz 4 beweisen wir den folgenden bekannten Satz.

<u>Satz 5:</u> Es sei $\mathfrak{L}$ eine Landkarte, in der jeder Knotenpunkt einen durch drei teilbaren Grad hat. Es möge eine Funktion existieren, die jedem Knotenpunkt von $\mathfrak{L}$ einen der Werte 1, 2 zuordnet derart, daß die Summe der Werte der Eckpunkte eines jeden Landes durch drei teilbar ist. Dann lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben in der Weise zulässig färben, daß Länder, die längs einer Kante benachbart sind, verschiedene Farben erhalten.

B e w e i s : Wir gehen von $\mathfrak{L}$ über zu einer normalen Landkarte $\mathfrak{L}'$, die wie folgt konstruiert wird: Ist P ein Knotenpunkt vom Grad $3n$, und ist P der Wert 1 zugeordnet, so wird P "aufgeblasen" zu einem $3n$-eck (vgl. Abb. 3 für den Fall $n = 2$).

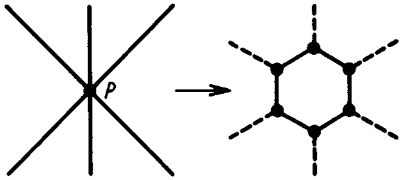

Abb. 3

Ist P ein Knotenpunkt vom Grad $3n$, und ist P der Wert 2 zugeordnet, dann wird P zunächst ebenfalls zu einem $3n$-eck aufgeblasen; in dieses $3n$-eck wird ein weiteres $3n$-eck gelegt, und dessen Eckpunkte werden mit den Kantenmitten des ursprünglichen $3n$-ecks verbunden (vgl. Abb. 4 für den Fall $n = 2$).

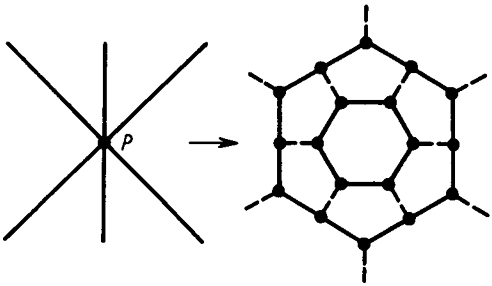

Abb. 4

In der so erhaltenen normalen Landkarte $\mathfrak{L}'$ färben wir die Kanten wie folgt mit zwei Farben, rot und blau: Die ursprünglichen Kanten von $\mathfrak{L}$ erhalten die Farbe rot, die Kanten der in $\mathfrak{L}'$ zusätzlich entstehenden $3n$-ecke blau, die Kanten, die durch Verbindung der Eckpunkte eines der "inneren" $3n$-ecke mit den Kantenmitten der "äußeren" $3n$-ecke hinzukommen (bei der Umwandlung der Punkte von $\mathfrak{L}$ mit dem Wert 2) wiederum rot. Zur Veranschaulichung sind in Abb. 3 und 4 die roten Kanten gestrichelt gezeichnet. Offenbar bilden die roten Kanten einen Faktor ersten Grades in $\mathfrak{L}'$. Ferner ist die Anzahl der blauen Kanten in jedem Land von $\mathfrak{L}'$ durch drei teilbar: denn bei den gegenüber $\mathfrak{L}$ neu hinzugekommenen Ländern ist dies auf Grund der Konstruktion sowieso der Fall, und bei den übrigen Ländern ist die Anzahl der blauen Kanten gleich der Summe der den entsprechenden Eckpunkten des entsprechenden Landes von $\mathfrak{L}$ zugeordneten Werte, also auch durch drei teilbar. Auf Grund von Satz 4 lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}'$ mit vier Farben zulässig färben. Man erkennt sofort, daß jede derartige Färbung eine zulässige Färbung von $\mathfrak{L}$ induziert. q.e.d.

Nunmehr behandeln wir das eingangs erwähnte Problem.

Satz 6: Es sei $\mathfrak{L}$ eine Landkarte, die lokalregulär vom Grad vier ist, und in der jedes Land eine durch drei teilbare Anzahl von Eckpunkten hat. Dann lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben in der Weise zulässig färben, daß je zwei Länder, die einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen, verschiedene Farben erhalten.

B e w e i s : Wir gehen von $\mathfrak{L}$ über zu einer normalen Landkarte $\mathfrak{L}'$, indem wir jeden der Punkte von $\mathfrak{L}$ zu einer Kante ausziehen und die Eckpunkte der neuen Kante mit je zwei der Ausgangskanten verbinden, so, wie dies in Abb. 5 illustriert wird.

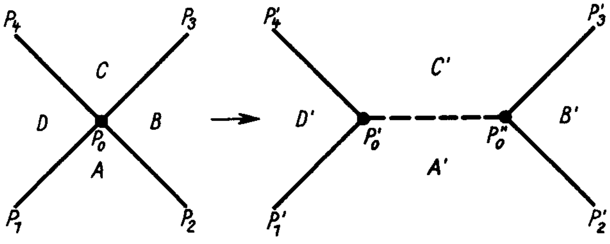

Abb. 5

In $\mathfrak{L}'$ färben wir die hinzugekommenen Kanten (in Abb. 5 also die Kante $P_0'P_0''$) rot, die übrigen blau. Die roten Kanten bilden einen Faktor von $\mathfrak{L}'$, und jedes Land hat, zufolge der Voraussetzung über $\mathfrak{L}$, eine durch drei teilbare Anzahl von Eckpunkten. Die Länder von $\mathfrak{L}'$ lassen sich also auf Grund von Satz 4 mit vier Farben zulässig färben. Um zu zeigen, daß eine derartige Färbung von $\mathfrak{L}'$ sofort eine Färbung der gewünschten Art von $\mathfrak{L}$ induziert, genügt es offenbar zu zeigen, daß bei jener Färbung von $\mathfrak{L}'$ die Länder B' und D' in Abb. 5 notwendigerweise verschiedene Farben erhalten. Dies zeige ich jetzt; dabei setze ich die Kenntnis des Beweises für den Satz von Tait, so wie er in [1] geführt wird, voraus. Wir färben die Knotenpunkte von $\mathfrak{L}$ mit drei Farben 0, 1, 2 unter Anwendung von Satz 3 so, daß die dort angegebene Forderung erfüllt ist. Die Färbung sei mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\mathfrak{J}(P_1) = 0$, $\mathfrak{J}(P_0) = 1$, $\mathfrak{J}(P_2) = 2$. Dies impliziert $\mathfrak{J}(P_3) = 0$, $\mathfrak{J}(P_4) = 2$. Wir übertragen diese Färbung auf die Bildpunkte in $\mathfrak{L}'$. Mit der Bezeichnung $\mathfrak{J}'$ für diese Färbung ist dann $\mathfrak{J}'(P_1') = \mathfrak{J}'(P_3') = 0$, $\mathfrak{J}'(P_0') = \mathfrak{J}'(P_0') = 1$, $\mathfrak{J}'(P_2') = \mathfrak{J}'(P_4) = 2$. Wir gehen über zu einer Kantenfärbung f nach der beim Beweis von Satz 4 geschilderten Art, dies ergibt $f(P_1'P_0') = f(P_0''P_3') = 1$, $f(P_0'P_0'') = 2$, $f(P_4'P_0') = f(P_0''P_2') = 0$. Die Färbung f ergibt drei Arten von alternierend mit zwei der Farben $0, 1, 2$ gefärbten Kreisen. Je zwei dieser Arten von Kreisen induzieren nach der bei [1] beschriebenen Methode eine zulässige Färbung der Länder von $\mathfrak{L}'$. Ein abwechselnd mit 1 und 2 gefärbter Kreis führt über $P_1'\ P_0'\ P_0''\ P_3'$, ein abwechselnd mit 0 und 2 gefärbter über $P_4'\ P_0'\ P_0''\ P_2'$, zwei abwechselnd mit 1 und 2 gefärbte über $P_1'P_0'P_4'$ bzw. über $P_2'P_0''P_3'$. Man sieht: welche zwei Arten von Kreisen ich auch zur Erzeugung der Länderfärbung benutze - in jedem Fall werden die Länder D' und B' durch mindestens einen Kreis einer dieser zwei Arten getrennt. Das heißt aber gerade, daß sie bei der induzierten Färbung verschiedene Farben erhalten. q.e.d.

Von jetzt an will ich den Begriff "Landkarte" aufspalten und ggf. die Forderung der Zweiecklosigkeit (keine Mehrfachkanten) fallen lassen; ich spreche dann von "Landkarten im weiteren Sinne" (kurz: Landkarte i.w.S.); die bisherigen "Landkarten" sollen nunmehr "Landkarten im engeren Sinne" (kurz: Landkarten i.e.S.) heißen; "Landkarte" schlechthin ist Sammelbegriff für beides.

> Satz 7: Es sei $\mathfrak{L}$ eine Landkarte i.w.S., die lokalregulär vom Grad vier ist. Es möge eine Funktion existieren, die jedem Knotenpunkt von $\mathfrak{L}$ einen der Werte $1, 2$ zuordnet derart, daß die Summe der Werte der Eckpunkte eines beliebigen Landes durch drei teilbar ist. Dann lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben färben in der Weise, daß Länder, die einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen, verschiedene Farben erhalten.

B e w e i s : Wir gehen über von $\mathfrak{L}$ zu einer Landkarte $\mathfrak{L}'$, die wie folgt konstruiert wird: Ist P ein Punkt von $\mathfrak{L}$, dem der Wert 1 zugeordnet ist, so wird nichts geändert. Hat P aber den Wert 2, so wird er "eingekreist", so, wie dies die Abb. 6 illustriert.

$\mathfrak{L}'$ ist wieder lokalregulär vom Grad vier. Außerdem hat jedes Land von $\mathfrak{L}'$ eine durch drei teilbare Eckpunktzahl. Die neu hinzugekommenen Länder (in Abb. 6 sind dies L_0'', L_1'', L_2'', L_3'') sind Dreiecke,

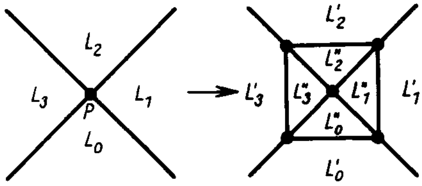

Abb. 6

und die übrigen Länder sind offensichtlich durch ebensoviele Kanten begrenzt, wie die Summe der Eckpunkte der ihnen entsprechenden Länder in $\mathfrak{L}$ angibt; insbesondere ist $\mathfrak{L}'$ auch Landkarte i.e.S. Auf Grund von Satz 6 lassen sich also die Länder von $\mathfrak{L}'$ mit vier Farben in der geforderten Weise färben. Um zu zeigen, daß jede solche Färbung der Länder von $\mathfrak{L}'$ eine Färbung der Länder von $\mathfrak{L}$ der geforderten Art induziert, genügt es offenbar zu zeigen, daß bei jeder derartigen Färbung von $\mathfrak{L}'$ in Abb. 1 die Länder L_2' und L_0' sowie in Abb. 7 die Länder L_3' und L_1' verschieden gefärbt werden. Es sei f eine Färbung von $\mathfrak{L}'$ der geforderten Art mit den Farben 0, 1, 2, 3. O.B.d.A. sei $f(L_0'') = 0$, $f(L_0'') = 1$, $f(L_1'') = 2$, $f(L_0') = 3$. Dies impliziert $f(L_2'') = 2$, $f(L_3'') = 3$; dies wiederum impliziert $f(L_2') = 0$, $f(L_3') = 1$. Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 6 erhält man als Spezialfall von Satz 7 zurück, indem man alle Punkte mit 1 bewertet. Einen anderen Spezialfall liefert uns der folgende Satz.

Satz 8: Es sei $\mathfrak{L}$ eine Landkarte i.w.S., die lokalregulär vom Grad vier ist; jedes Land habe eine gerade Anzahl von Eckpunkten. Dann existiert eine Färbung der Länder von $\mathfrak{L}$ von der in Satz 6 und 7 beschriebenen Art.

B e w e i s : $\mathfrak{L}$ ist ein paarer Graph, und den Knotenpunkten lassen sich zwei Werte, 1 und 2, so zuordnen, daß benachbarte Knotenpunkte verschiedene Werte erhalten. Ist L ein Land von $\mathfrak{L}$ und $2n_L$ die Anzahl seiner Eckpunkte, so ist die Summe der den Eckpunkten von L zugeordneten Werte offenbar gleich $n_L \cdot 1 + n_L \cdot 2 = 3n_L$, also durch drei teilbar. Damit erfüllt aber $\mathfrak{L}$ die Voraussetzung von Satz 7. q.e.d.

Der folgende Satz läßt eine Verbindung zwischen Satz 8 und dem Vierfarbenproblem erkennen.

Satz 9: Es sei $\mathfrak{L}$ eine normale Landkarte (i.w.S.) mit gegebenem Faktor ersten Grades. Es möge eine Funktion existieren, die den roten Kanten "Vielfachheiten" 0 und 1 zuordnet derart, daß die Zahl der ein beliebiges Land von $\mathfrak{L}$ begrenzenden Kanten, die roten mit ihrer Vielfachheit gerechnet, jeweils gerade ist. Dann lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben zulässig färben.

B e w e i s : Wir gehen über von $\mathfrak{L}$ zu einer Landkarte $\mathfrak{L}'$ (i.w.S.), die wie folgt konstruiert ist. Ist $\mathfrak{k}$ eine rote Kante von $\mathfrak{L}$ der Vielfachheit 0, so werden die Eckpunkte identifiziert (vgl. Abb.2); hat $\mathfrak{k}$ jedoch die Vielfachheit 2, so wird $\mathfrak{k}$ verdoppelt (vgl.Abb.7):

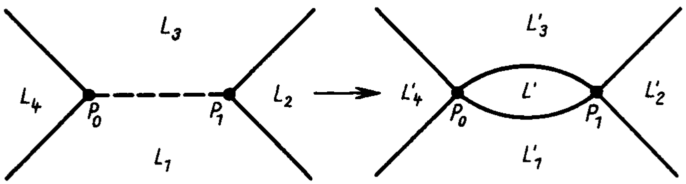

Abb. 7

$\mathfrak{L}'$ ist lokalregulär vom Grad vier; außerdem ist, gemäß der Voraussetzung über $\mathfrak{L}$, jedes Land von $\mathfrak{L}'$ durch eine gerade Anzahl von Kanten begrenzt; auf Grund von Satz 8 lassen sich also die Länder von $\mathfrak{L}'$ mit vier Farben so färben, daß Länder, die einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen, verschiedene Farben erhalten. In Abb. 2 erhalten also L_4' und L_2', in Abb. 7 die Länder L_1' und L_3' verschiedene Farben. Daraus erhellt sofort, daß diese Färbung von $\mathfrak{L}'$ eine zulässige Färbung von $\mathfrak{L}$ induziert. q.e.d.

Korollar: Ist in einer normalen Landkarte $\mathfrak{L}$ mit gegebenem Faktor ersten Grades die Anzahl der ein beliebiges Land begrenzenden blauen Kanten gerade, so lassen sich die Länder von $\mathfrak{L}$ mit vier Farben zulässig färben.

Literatur

[1] Ringel, G.: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin 1959.