Über Zyklen in Turnieren

Anton Kotzig

1. Terminologie, Definitionen und Bezeichnungen

Unter einem Graphen verstehen wir immer einen endlichen Graphen ohne Schlingen und mehrfache Kanten. Den vollständigen antisymmetrischen Graphen nennen wir ein Turnier. Den Begriff Zyklus benutzen wir laut KÖNIG. An Stelle Zyklus der Länge n werden wir auch n-Zyklus sagen. Es sei v ein Knotenpunkt des gerichteten Graphen G. Unter dem Eingangsgrad von v (resp. Ausgangsgrad von v) verstehen wir die Anzahl der Kanten von G, welche in v enden (resp. welche von v ausgehen). Den Eingangsgrad von v (resp. Ausgangsgrad von v) bezeichnen wir mit $e_G(v)$ (resp. mit $a_G(v)$). Mit $d_G(k)$ bezeichnen wir die Anzahl derjenigen 3-Zyklen von G, die die Kante k enthalten.

Eine gerichtete, vom Knotenpunkt u ausgehende und im Knotenpunkt v endende Kante bezeichnen wir mit $\overrightarrow{uv}$, oder auch mit $\overleftarrow{vu}$. Wenn G ein Turnier ist und wenn x, y $(x \neq y)$ zwei beliebige Knotenpunkte von G sind, dann enthält G genau eine der Kanten $\overrightarrow{xy}$ oder $\overleftarrow{xy}$. Wir werden sagen, daß wir die Kante $\overrightarrow{uv}$ in einem Graphen umkehren, falls wir sie durch die Kante $\overleftarrow{uv}$ ersetzen.

Es sei F ein beliebiger gerichteter Graph. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$e^*(F) = \sum_{v\in F} e_F^2(v) \;; \qquad a^*(F) = \sum_{v\in F} a_F^2(v).$$

Ein Turnier G, in welchem für jeden Knotenpunkt v die Beziehung $e_G(v) = a_G(v)$ gilt, werden wir ein ρ-Turnier nennen. G ist ein ξ-Turnier genau dann, falls seine Knotenpunkte so numeriert werden können, daß für jedes Indexpaar $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: Wenn G die Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ besitzt, dann besitzt G auch die Kante $\overrightarrow{v_{i+1}v_{j+1}}$ (dabei sei $v_{n+1} = v_1$). Eine solche Numerierung der Knotenpunkte eines ξ-Turniers werden wir eine normale Numerierung nennen. Es ist klar, daß jedes ξ-Turnier eine ungerade Anzahl von Knotenpunkten enthält.

2. Ergebnisse

Satz 1: In einem beliebigen Turnier G gilt:

$$e^*(G) = a^*(G).$$

Satz 2: Es sei A ein azyklisches Turnier mit n Knotenpunkten, dann gilt:

$$e^*(A) = a^*(A) = \frac{1}{6}\, n(n-1)(2n-1).$$

Es sei G ein Turnier, welches mindestens einen Zyklus enthält und welches durch Umkehrung einer Kante aus A entsteht; dann gilt:

$$e^*(G) < e^*(A).$$

Satz 3: Es sei F ein mindestens einen Zyklus enthaltendes Turnier; dann enthält F eine Kante, welche folgende Eigenschaft besitzt: Durch Umkehrung dieser Kante entsteht ein Turnier G, so daß

$$e^*(G) > e^*(F)$$

gilt. Den maximalen Wert e^* bei einer gegebenen Anzahl von Knotenpunkten hat das azyklische Turnier.

Satz 4: Enthält ein Turnier einen Zyklus, so enthält es mindestens eine Kante, durch deren Umkehrung ein Turnier mit einer kleineren Anzahl von 3-Zyklen entsteht.

Satz 5: Es sei G ein Turnier mit n Knotenpunkten, dann gilt:

1.) $e^*(G) \geq \frac{1}{4}\, n(n^2-2n+2)$, falls n gerade ist,

2.) $e^*(G) \geq \frac{1}{4}\, n(n^2-2n+1)$, falls n ungerade ist.

Satz 6: Es sei G ein Turnier mit n Knotenpunkten, $\alpha(G)$ die Anzahl seiner azyklischen Teilturniere mit 4 Knotenpunkten und $\delta(G)$ die Anzahl der 4-Zyklen in G. Es gilt:

$$\delta(G) = \alpha(G) + \frac{1}{8} n^2(n-1)(n-3) - \frac{1}{2}(n-3)e^*(G).$$

Falls G ein ρ-Turnier ist, gilt:

$$\delta(G) = \alpha(G) + \frac{1}{8} n(n-1)(n-3).$$

Satz 7: Es sei G ein ρ-Turnier mit $2n+1$ Knotenpunkten und es sei $\delta(G)$ die Anzahl seiner 4-Zyklen, dann gilt:

1.) $\frac{1}{8}(2n+1)\,n\,(n^2-2n+2) \le \delta(G) \le \frac{1}{2}\binom{2n+1}{4}$, falls n gerade ist,

2.) $\frac{1}{8}(2n+1)\,n\,(n^2-2n+1) \le \delta(G) \le \frac{1}{2}\binom{2n+1}{4}$, falls n ungerade ist.

Für unendlich viele Zahlen n sind die oben erwähnten Schranken scharf.

Satz 8: Ein ξ-Turnier ist ein spezieller Fall des ρ-Turniers.

Satz 9: Es sei G ein ξ-Turnier und es sei $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine normale Numerierung seiner Knotenpunkte. Es seien r, s zwei ganze Zahlen, wobei die Zahlen n und r teilerfremd sind. Dann ist die Numerierung $\{v_{r+s}, v_{2r+s}, \dots, v_{nr+s}\}$ (wo $[v_x = v_y] \Longleftrightarrow [x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)]$) auch eine normale Numerierung der Knotenpunkte von G.

Satz 10: In einem Turnier G gilt $d_G(k) = 0$ für jede Kante k genau dann, wenn G ein azyklisches Turnier ist.

Satz 11: Sei r eine natürliche Zahl. Wenn in einem Turnier G für jede Kante k gilt $d_G(k) = r$, dann ist G ein ρ-Turnier mit $4r-1$ Knotenpunkten.

Satz 12: Es sei G ein ξ-Turnier mit nr Knotenpunkten $(n > 1)$ und es sei $\{v_1, v_2, \dots, v_{nr}\}$ eine normale Numerierung seiner Knotenpunkte. Es sei F sein Teilturnier, welches alle Knotenpunkte und nur Knotenpunkte von $\{ v_r, v_{2r}, \ldots, v_{nr} \}$ besitzt. Dann ist F ein ξ-Turnier und es gilt

$$d_G(k) \equiv d_F(k) (\mathrm{mod}\ 2) \quad \text{für jede Kante } k \in F.$$

Satz 13: Es sei G ein ξ-Turnier mit n Knotenpunkten. Ist n durch eine ganze Zahl von der Form $8p-3$ (wo p eine ganze Zahl ist) teilbar, dann enthält G zwei Kanten h und k, so daß gilt:

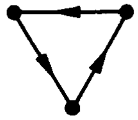
$$d_G(h) \not\equiv d_G(k) (\mathrm{mod}\ 2).$$

Satz 14: Es sei G ein ξ-Turnier mit n Knotenpunkten. Wenn für irgendeine natürliche Zahl z die Zahlen n und $m = 4^z + 1$ einen gemeinschaftlichen Teiler größer als 1 haben, dann besitzt G zwei Kanten h und k derart, daß gilt:

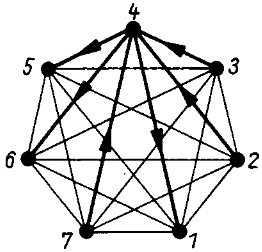
$$d_G(h) \not\equiv d_G(k) (\mathrm{mod}\ 2).$$

Satz 15: Zu jeder Primzahl p von der Form $4r-1$ existiert ein ξ-Turnier G mit p Knotenpunkten, in welchem $d_G(k) = r$ für jede seine Kante k gilt.

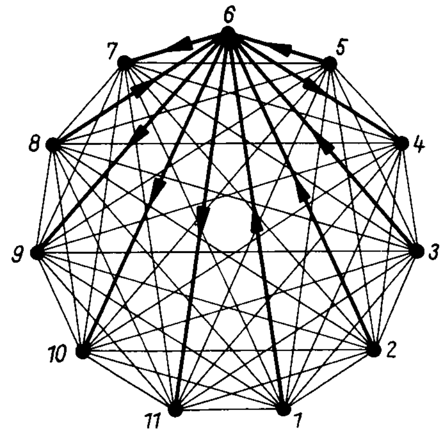
Gemäß unserer Arbeit: "Sur les tournois avec des 3-cycles régulièrement distribués" (im Druck) kann man das Turnier G von Satz 15 folgendermaßen erzeugen: Es sei p eine Primzahl von der Form $4r-1$. Wir bezeichnen mit $v_1, v_2, \ldots, v_p$ die Knotenpunkte des vollständigen ungerichteten Graphen F mit p Knotenpunkten und erzeugen aus F ein ξ-Turnier G in folgender Weise: Es sei x eine der Zahlen $\{ 1, 2, \ldots, 2r-1 \}$; die Kante, welche die Knotenpunkte v_y und v_{x+y} verbindet, verläuft von v_y nach v_{x+y} genau dann, wenn eine natürliche Zahl z existiert, so daß $z^2 \equiv x (\mathrm{mod}\ p)$ gilt.
(In der Abbildung sind die Beispiele für $r = 1, 2, 3, 5$ angegeben).



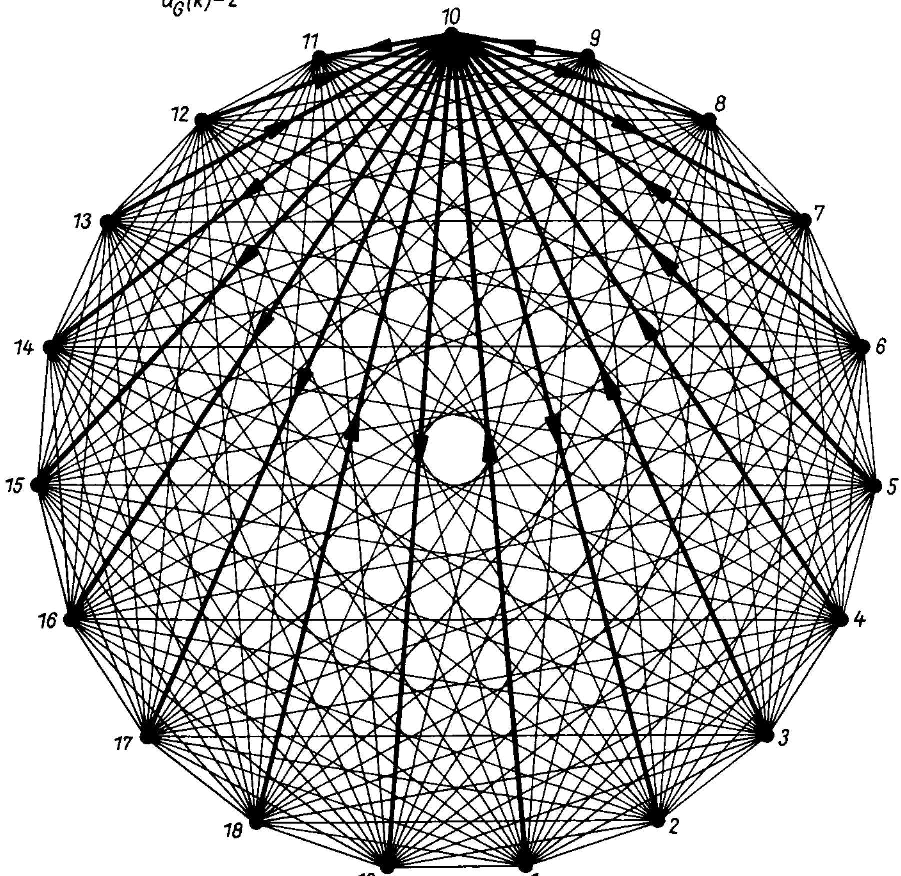
$d_G(k)=1$



$d_G(k)=2$



$d_G(k)=3$



$d_G(k)=5$