Über längste Kreise in regulären Graphen

Rainer Lang, Hansjoachim Walther

Wir betrachten ungerichtete schlichte Graphen (das sind Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten). Unter einem <u>längsten Kreis</u> im Graphen G verstehen wir einen Kreis (ohne Überschneidungen) mit möglichst vielen Knotenpunkten. $G(k;r;b)$ sei ein k-fach zusammenhängender regulärer Graph vom Grad r, wobei b die Länge eines längsten Kreises ist. Mit $|G|$ bezeichnen wir die Anzahl der Knotenpunkte von G.

In [1] und [2] wurden Folgen $\{G_n(3;3;b_n)\}$ von planaren Graphen konstruiert, für die

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n(3;3;b_n)|} = 0 \tag{1}$$

gilt.[1)] In [4] wurde für beliebiges festes k eine Folge $\{G_n(k;r_n;b_n)\}$ angegeben, für die ebenfalls

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n(k;r_n;b_n)|} = 0 \tag{2}$$

gilt. Dabei strebte jedoch für $n \to \infty$ der Grad r_n ebenfalls gegen Unendlich.

Bekanntlich gilt für jeden k-fach zusammenhängenden regulären Graphen vom Grade r:

$$r - k \geq 0.$$

P r o b l e m : Zu gegebenem festen $k \geq 2$ sind Folgen von Graphen $\{G_n(k;r;b_n)\}$ mit festem r zu bilden, so daß

---

1) In [3] wird ein verwandtes Problem gelöst, wobei jedoch die konstruierten Graphen nicht regulär sind.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n(k;r;b_n)|} = 0 \tag{3}$$

gilt und die Differenz $r - k$ möglichst klein ist. Für $k = 3$ wurde das Problem mit $r = 3$ (also $r - k = 0$) in [1] und [2] gelöst. In der vorliegenden Arbeit werden wir das Problem für folgende Fälle lösen:

A. k gerade: $r = k + 1$, also $r - k = 1$,
B. k ungerade: $r = k + 2$, also $r - k = 2$.

Ungeklärt bleibt, ob sich die Fälle

$r - k = 0$ für gerades k,
$r - k \leq 1$ für ungerades $k > 3$

realisieren lassen.

Wir behandeln zunächst den Fall A.
A. $k = 2p$, p beliebige natürliche Zahl.
Wir konstruieren eine Graphenfolge $\{G_n(k;k+1;b_n)\}$ wie folgt:
G_n habe die Knotenpunktmenge X_n und die Kantenmenge U_n. Dabei sei

$$X_n = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_{n+1} \cup B_{n+1}$$

mit

$$S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = S^1$$

und

$$S_{j+1} = \bigcup_{i_1=1}^{k+1} \bigcup_{i_2, i_3, \dots, i_j=1}^{k} S^{j+1}_{i_1, i_2, \dots, i_j} \qquad (j = 1,2,\dots,n)$$

wobei $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ aus k Knotenpunkten besteht, und zwar ist

$$S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j} = \{a_{1,i_1,i_2,\dots,i_j}, a_{2,i_1,i_2,\dots,i_j}, \dots$$
$$\dots, a_{k,i_1,i_2,\dots,i_j}\}.$$

Die Knotenpunkte aus S_{j+1} nennen wir <u>Knotenpunkte (j+1)-ter Stufe.</u>
Ferner ist

$$B_{n+1} = \bigcup_{i_1=1}^{k+1} \bigcup_{i_2, i_3, \dots, i_n=1}^{k} B_{i_1, i_2, \dots, i_n},$$

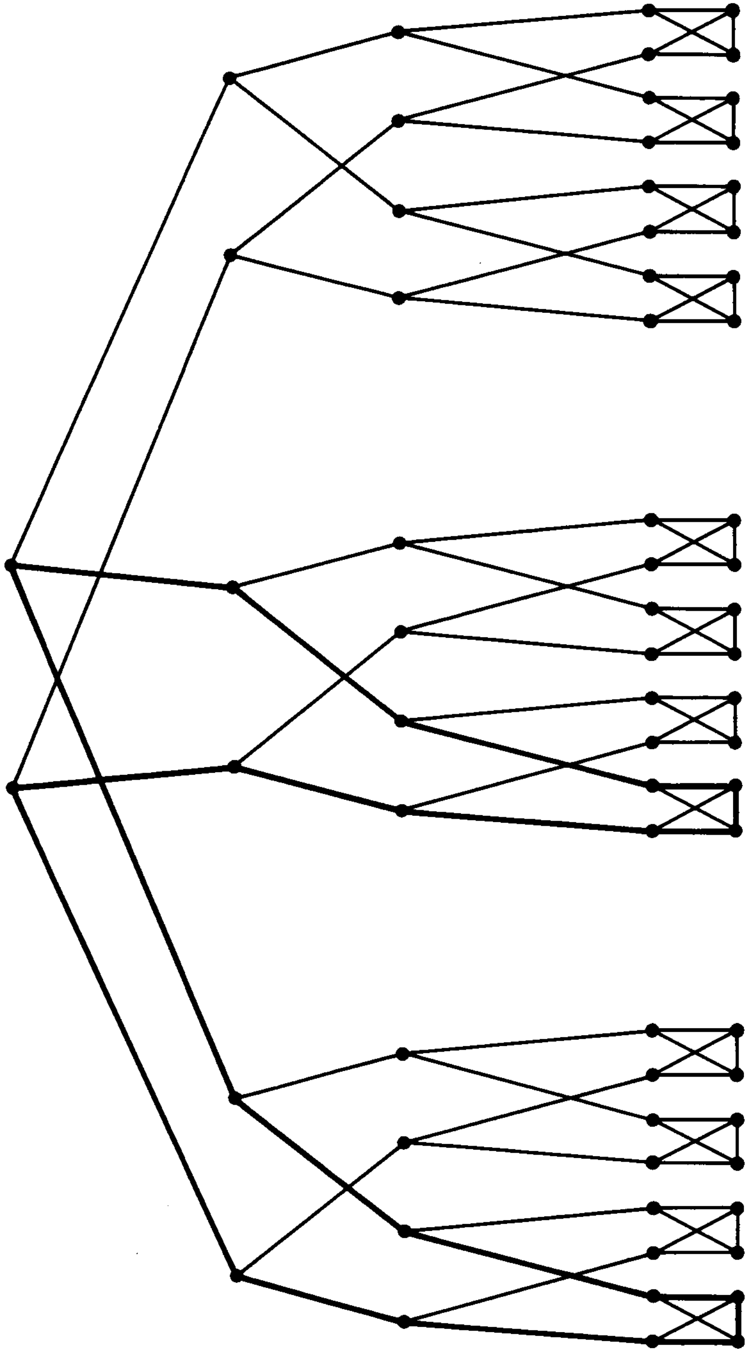

Abb. 1

wobei $B_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ ebenfalls aus k Knotenpunkten besteht, und zwar

$$B_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \{b_{1,i_1,i_2,\dots,i_n}, b_{2,i_1,i_2,\dots,i_n},\dots \\ \dots, b_{k,i_1,i_2,\dots,i_n}\}.$$

Die Kantenmenge U_n bestehe aus folgenden Kanten:

1.) Für alle $i_1 = 1, 2,\dots, k, k+1$; $i_2, i_3,\dots, i_j = 1, 2,\dots, k$; $j = 1, 2,\dots, n$ wird der Knotenpunkt $a_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ der j-ten Stufe mit den k Knotenpunkten $a_{i_1,i_2,\dots,i_j,i_{j+1}}$ ($i_{j+1} = 1, 2,\dots, k$) der ($j+1$)-ten Stufe durch eine Kante verbunden(Abb. 1).

2.) Jeder Knotenpunkt $a_{e,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}$ der ($n+1$)-ten Stufe wird mit den k Knotenpunkten $b_{f,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}$ ($f = 1, 2,\dots, k$) verbunden.

3.) Alle Kanten der Form

$$(b_{1,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}, b_{2,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}),$$
$$(b_{3,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}, b_{4,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(b_{k-1,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}, b_{k,i_2,i_3,\dots,i_{n+1}}),$$

wobei $i_2 = 1, 2, 3,\dots, k+1$; $i_3, i_4,\dots, i_{n+1} = 1, 2,\dots, k$.

Die unter 2.) und 3.) aufgeführten Kanten dienen lediglich dem regulären Abschluß des Graphen G_n. Abb. 1 zeigt als Beispiel den Graphen $G_4(2;3;18)$ mit $|G_4| = 68$. Ein längster Kreis ist eingezeichnet.

D e f i n i t i o n : Die Knotenpunktgruppe

$\Sigma' = S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1},i_j}$ heißt <u>Nachfolger</u> der Knotenpunktgruppe

$\Sigma = S^{j}_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}}$; entsprechend heißt Σ <u>Vorgänger</u> von Σ'.

Hilfssatz 1: Sei K_n ein längster Kreis von G_n, der sowohl Knotenpunkte aus $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ als auch Knotenpunkte aus $S^{j}_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}}$ enthält. Dann liegt aus wenigstens einer der k Knotenpunktgruppen $S^{j+2}_{i_1,i_2,\dots,i_j,i_{j+1}}$ $(j+1 = 1, 2,\dots, k)$ kein Knotenpunkt in K_n.

B e w e i s : Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann enthält K_n Knotenpunkte aus allen k Nachfolgergruppen der Gruppe $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$. Dann führen aber von jeder der k Knotenpunktgruppen $S^{j+2}_{i_1,i_2,\dots,i_j,i_{j+1}}$ zwei in K_n liegende Kanten nach $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$. Das sind insgesamt $2k$ Kanten. Da nach Voraussetzung aber mindestens zwei in K_n liegende Kanten von $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ nach $S^{j}_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}}$ führen, inzidieren die k Knotenpunkte von $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ mit mindestens $2k + 2$ in K_n liegenden Kanten. Das ist aber ein Widerspruch, wodurch der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2: Unter allen Kreisen von G_n, welche Knotenpunkte aus $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ $(j < n)$, aber keine aus $S^{j}_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}}$ enthalten, sei L_{j+1} ein längster. Dann gilt:

$$|L_{j+1}| \le \begin{cases} k + k^2(k-1)^{n-j-1} + k^2\,\dfrac{(k-1)^{n-j}-1}{k-2} & \text{für } k > 2, \\ k + k^2(n-j+1) = 2+4(n-j+1) & \text{für } k = 2. \end{cases}$$

B e w e i s : L_{j+1} enthält höchstens k Knotenpunkte der $(j+1)$-ten Stufe und keine Knotenpunkte von niedrigerer Stufe, da andernfalls L_{j+1} Knotenpunkte aus der Vorgängerknotenpunktgruppe $S^{j}_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}}$ von $S^{j+1}_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ enthalten würde, im Widerspruch zur Voraussetzung. L_{j+1} enthält höchstens k^2 Knotenpunkte der $(j+2)$-ten Stufe, wegen Hilfssatz 1 höchstens $k^2(k-1)$ Knotenpunkte der $(j+3)$-ten Stufe, usw. L_{j+1} enthält höchstens $k^2(k-1)^{n-j+1}$ Knotenpunkte der $(n+1)$-ten Stufe. Aus der Knotenpunktmenge B_{n+1} liegen höchstens $k^2(k-1)^{n-j-1}$ Knotenpunkte in L_{j+1}. Durch Summation folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz 3: Ist K_n ein längster Kreis von G_n, dann gilt

$$|K_n| \leq \begin{cases} k + k^2(k-1)^{n-1} + k^2 \dfrac{(k-1)^n-1}{k-2} & \text{für } k > 2, \\ k + k^2(n+1) = 6 + 4n & \text{für } k = 2. \end{cases} \tag{5}$$

B e w e i s : In den Formeln von Hilfssatz 2 wird das Maximum offensichtlich für $j = 0$ erreicht.

Hilfssatz 4: Es gilt

$$|G_n| = k + (k+1)k^n + (k+1)k \frac{k^n-1}{k-1} \quad (k \geq 2). \tag{6}$$

B e w e i s : G_n enthält k Knotenpunkte erster Stufe, $k(k+1)$ Knotenpunkte zweiter Stufe, $k^2(k+1)$ Knotenpunkte dritter Stufe, $\ldots, k^n(k+1)$ Knotenpunkte $(n+1)$-ter Stufe und $k^n(k+1)$ Knotenpunkte aus B_{n+1}. Durch Summation ergibt sich Formel (6).

Aus den Hilfssätzen 3 und 4 ergibt sich mit geeignetem C:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n|} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{k+k^2(k-1)^{n-1}+k^2 \frac{(k-1)^n-1}{k-2}}{k + (k+1)k^n + (k+1)k \frac{k^n-1}{k-1}}$$

$$\leq C \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^n = 0 \quad \text{für } k > 2,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n|} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{6+4n}{9 \cdot 2^n - 4} = 0 \quad \text{für } k = 2.$$

Wir beweisen nun den folgenden Satz.

Satz 1: Zu jeder beliebigen geraden Zahl $k \geq 2$ gibt es eine Graphenfolge $\{G_n(k;k+1;b_n)\}$, für die

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n(k;k+1;b_n)|} = 0 \quad \text{gilt.}$$

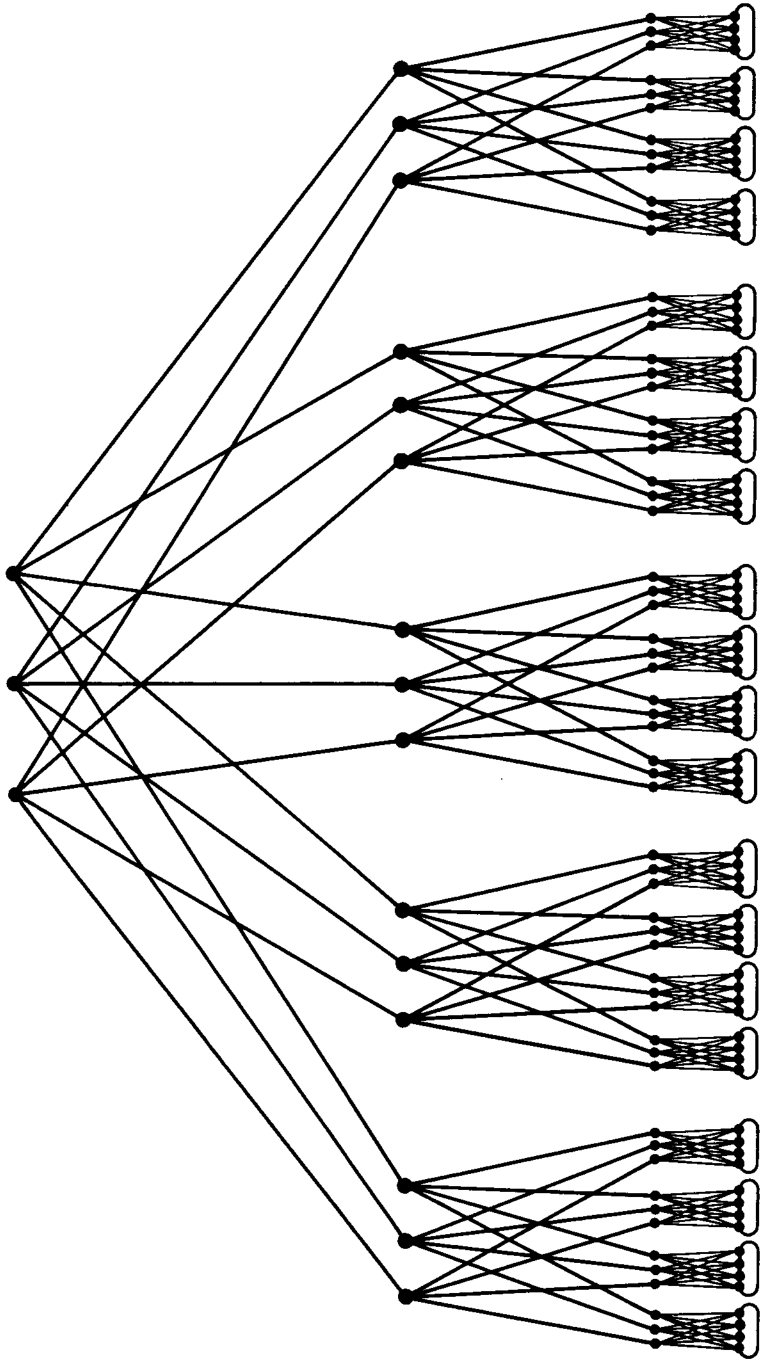

Abb. 2

B e w e i s : Es ist nur noch zu beweisen, daß die Graphen der oben konstruierten Folge k-fach zusammenhängend sind. Dazu zeigen wir, daß je zwei beliebige Knotenpunkte von G_n durch k knotendisjunkte Wege verbunden sind.
Den Beweis im einzelnen auszuführen, ist sehr mühsam. Der Grundgedanke ist der folgende:
Es gibt von jedem beliebigen Knotenpunkt $a_{i_1 i_2, \dots i_{j+1}}$ der Knotenpunktgruppe $S_{i_1, i_2, \dots, i_j}$ der (j+1)-ten Stufe $k - 1$ knotenfremde Wege zu den $k - 1$ anderen Knotenpunkten derselben Gruppe unter ausschließlicher Benutzung von Knotenpunkten höherer Stufe. Mit Hilfe der Abb. 1 und 2 kann man sich die weiteren Einzelheiten des Beweises leicht klarmachen.
In analoger Weise kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz 2: Zu jeder beliebigen ungeraden Zahl $k \geq 3$ gibt es eine Graphenfolge $\{G_n(k;k+2;b_n)\}$, für die

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{|G_n(k;k+2;b_n)|} = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Abb. 2 zeigt den Graphen $G_2(3;5;b_2)$ als ein Beispiel für ungerades k.

Literatur

[1] Grünbaum, B.; Motzkin, T.S.: Longest simple paths in polyhedral graphs, J. London Math. Soc. 37 (1962), Nr. 2, 152-160.

[2] Walther, H.: Über die Anzahl der Knotenpunkte eines längsten Kreises in planaren, kubischen, dreifach knotenzusammenhängenden Graphen. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaria (im Druck).

[3] Moon, J.W.: Simple paths on polyhedra, in "Theory of Graphs and its Applications", Proc. of the Symposium held in Smolenice in June 1963, Prague 1964.

[4] Walther, H.: Über die Länge eines längsten Kreises in regulären Graphen beliebigen Zusammenhanges. Wiss. Z. TH Ilmenau (im Druck).