Über das Geschlecht des vollständigen Graphen

Gerhard Ringel

Üblicherweise werden in einem Tagungsvortrag die leichteren Beweisteile genau vorgetragen und die schwierigen nur im Ergebnis referiert. Hier möchte ich absichtlich die leichten Teile nur skizzieren und auf die eigentlichen kombinatorischen Schwierigkeiten genau eingehen.

Wenn G ein Graph ist, so ist sein Geschlecht $\gamma(G)$ als das kleinstmögliche Geschlecht einer orientierbaren Fläche definiert, auf der sich G ohne Überschneidung der Kanten einzeichnen läßt. Oder vornehmer ausgedrückt: $\gamma(G) = g$ bedeutet, G ist homöomorph zu einem Teilraum der orientierbaren Fläche F_g vom Geschlechte g, aber nicht zu einem Teilraum von F_{g-1}.

Im vollständigen Graphen V_n mit n Knotenpunkten ist jeder Knotenpunkt mit jedem anderen durch genau eine Kante verbunden, d.h. V_n besitzt $\binom{n}{2}$ Kanten. Es ist leicht zu sehen, daß $\gamma(V_4) = 0$ ist. (Tetraederzerlegung der Kugel).

In den nächsten Fällen gilt $\gamma(V_5) = \gamma(V_6) = \gamma(V_7) = 1$. Um die letzte Gleichung zu beweisen, betrachten wir die in der Zeichnung wiedergegebene Zerlegung des Torus. (In dem Rechteck sind, wie üblich, gegenüberliegende Kanten zu identifizieren.)

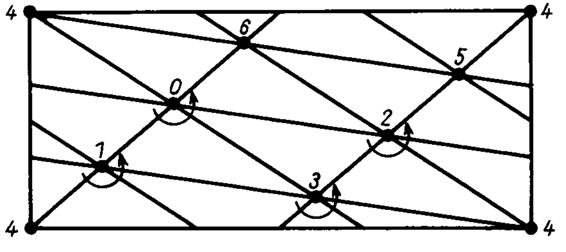

Abb. 1

Es sind tatsächlich 7 Knotenpunkte paarweise durch eine Kante verbunden. Wir bemerken, daß in dieser Zerlegung des Torus nur Dreiecke auftreten. Daß das Geschlecht $\gamma(K_7)$ nicht kleiner als 1 sein kann, ergibt sich aus der folgenden allgemeinen Überlegung, die HEAWOOD*) bereits 1890 angestellt hat.

Es sei $\gamma(V_n) = g$. Das heißt, der Graph V_n kann auf F_g gezeichnet werden. Die Fläche F_g zerfällt durch V_n in einzelne Flächenstücke. Diese sind lauter Elementarflächenstücke (= topologische Bilder von Kreisscheiben), sonst könnte man das Geschlecht verringern. Daher läßt sich die Eulersche Formel

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2g$$

anwenden. α_0, α_1 bzw. α_2 ist die Anzahl der Knotenpunkte, Kanten bzw. Flächenstücke. Hier ist $\alpha_0 = n$, $\alpha_1 = \binom{n}{2}$, $\alpha_2 = f_3+f_4+f_5+\ldots$, wenn f_i = Anzahl der i-Ecke der Zerlegung von F_g ist.

Da jedes i-Eck mit genau i Kanten inzidiert ist $\sum_{i=3}^{\infty} if_i = 2\alpha_1$, weil hierbei jede Kante genau zweimal gezählt wird. Aus den fünf obigen Gleichungen folgt durch einfache Rechnung:

$$\gamma(V_n) = \frac{(n-3)\,(n-4) + 2\,(f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots\,)}{12} \tag{1}$$

Da die Summe $f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots$ nicht negativ ist, folgt

$$\gamma(V_n) \geq \left\{\frac{(n-3)\,(n-4)}{12}\right\} \qquad \text{für} \quad n \geq 3. \tag{2}$$

Hierbei bedeutet $\{x\}$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$.

HEAWOOD vermutete, daß in (1) stets das Gleichheitszeichen gilt.

In meinem Vortrag soll einerseits der gegenwärtige Stand dieser Frage mitgeteilt, und andererseits die entscheidende Idee, die diese Fortschritte ermöglichte, genau erläutert werden. Heute ist die Heawoodsche Vermutung, nämlich das Gleichheitszeichen in (2), für alle

$$n \equiv 5,\;\; 7,\;\; 10,\;\; 3,\;\; 4,\;\; 0,\;\; 1,\;\; 9,\;\; 6 \pmod{12}$$

---

*) Heawood, P.J.: Map-colour theorem I, Quart.J.Math. 24, 332-338 (1890)

bewiesen. Diese neun Restklassen (mod 12) sind in der zeitlichen Reihenfolge angegeben. Für die vier zuerst angegebenen Restklassen wurde der Beweis von RINGEL 1959 bis 1961 geliefert, für die fünf anderen von den Amerikanern GUSTIN, TERRY, WELCH und YOUNGS 1962 bis 1965. Im Jahr 1967 fand RINGEL noch einen Beweis für alle $n \equiv 2$ (mod 24). Zurzeit ist also für $9\frac{1}{2}$ Restklassen von insgesamt 12 Restklassen die Heawoodsche Vermutung bewiesen.

Die Idee von GUSTIN, nämlich die Entwicklung der Lösung aus einem "current graph", in dem das Kirchhoffsche Gesetz gilt, soll nun am Fall $n \equiv 7 \pmod{12}$ erklärt werden.

Zunächst der Einzelfall $n \equiv 7$. Aus (2) folgt $\gamma(V_7) \geq 1$. Um $\gamma(V_7)$ zu zeigen, muß man eine Einbettung von V_7 in den Torus tatsächlich angeben. Wir taten dies mit Hilfe einer Zeichnung. Für höhere Fälle muß man die Zeichnung durch ein kombinatorisches Schema ersetzen. Wir erläutern dies am Fall $n = 7$. Die durch Abb. 1 gegebene Einbettung von V_7 in F_1 sei gegeben. Die 7 Knotenpunkte seien in bestimmter Weise mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, bezeichnet. Weiter sei eine Orientierung des Torus gegeben. So erhält auch jeder Knotenpunkt i eine bestimmte Orientierung; damit ist eine zyklische Reihenfolge der mit i inzidierenden Kanten gegeben. Jede dieser Kanten führt zu einem Knotenpunkt $\neq$ i. Somit ist für jeden Knotenpunkt eine bestimmte zyklische Reihenfolge der Nummern $\neq$ i gegeben. So erhalten wir aus Abb. 1 das Schema:

	0.	1	3	2	6	4	5
	1.	2	4	3	0	5	6
	2.	3	5	4	1	6	0
(S_7)	3.	4	6	5	2	0	1
	4.	5	0	6	3	1	2
	5.	6	1	0	4	5	3
	6.	0	2	1	5	6	4

In diesem Schema (S_7) muß die folgende <u>Dreiecksregel</u> gelten:

Wenn in der i-ten Zeile i. ... c a ... steht,
so steht in der a-ten Zeile a. ... i c ...
und in der c-ten Zeile c. ... a i ... .

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß nur Dreiecke auftreten.

Es sei jetzt allgemein $n \equiv 0, 3, 4$ oder 7. In diesen Fällen ist der Bruch auf der rechten Seite von (2) selbst schon eine ganze Zahl und die geschweiften Klammern haben keine Wirkung. Um zu zeigen, daß in (2) das Gleichheitszeichen gilt, haben wir wieder eine Einbettung von V_n in eine orientierbare Fläche anzugeben, für die wegen (1) die Summe $f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots = 0$ ist, d.h. in der nur Dreiecke auftreten. Eine solche Einbettung hat dann wegen der Eulerschen Formel automatisch das richtige Geschlecht. Wenn eine Einbettung von K_n mit den Knotenpunkten $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ in eine orientierbare Fläche existiert, in der nur Dreiecke auftreten, so kann diese wieder durch ein Schema, das für jedes i eine Permutation aller Nummern $\neq i$ angibt, und in dem die Dreiecksregel gilt, beschrieben werden. Ein solches Schema wollen wir ein Schema S_n nennen. Es ist nicht schwer einzusehen, daß zu einem vorgegebenen Schema S_n auch umgekehrt eine dazupassende Einbettung des vollständigen Graphen V_n existiert, in der nur Dreiecke auftreten.

Somit ist das Problem der Heawoodschen Vermutung auf die kombinatorische Frage zurückgeführt: Gibt es ein Schema S_n ?

Das Schema S_7 hat die zusätzliche schöne Eigenschaft, daß die $(i+1)$-te Zeile durch Addition mit $+1$ aus der i-ten Zeile entsteht, wenn man mit den Nummern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ wie mit den Restklassen $(\text{mod } 7)$ rechnet. Ein solches Schema S_n wollen wir ein zyklisches Schema nennen.

Im Falle $n \equiv 7 \pmod{12}$ geben wir nun in überraschend einfacher Weise ein zyklisches Schema S_n an. Es genügt natürlich, nur die 0-te Zeile, also eine ganz bestimmte Permutation der Nummern $1, 2, \ldots, n-1$ anzugeben, weil die anderen Zeilen durch Addition aus dieser hervorgehen. Wir erklären die Konstruktion am Fall $n = 55$. Der allgemeine Ansatz ist dann ganz leicht zu erkennen. Es werden nur einfache arithmetische Reihen verwendet. Wir suchen also eine bestimmte Permutation der Nummern 1 bis 54 oder, da wir modulo 55 rechnen, eine Permutation der Restklassen $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 27$. Wir betrachten den folgenden gerichteten Graphen, in dem jede Kante durch eine Zahl bewertet ist:

Die mit 9 bezeichnete Kante am linken und rechten Rand der Abbildung ist hierbei zu identifizieren, so daß ein Graph mit nur lauter Knotenpunkten dritten Grades entsteht.

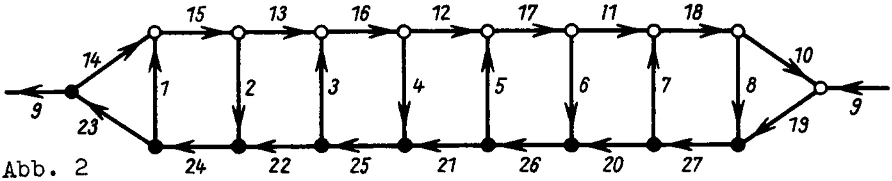

Abb. 2

Dieses Kunstwerk hat die Eigenschaft, daß jede der Nummern, 1 bis 27 genau einmal vorkommt, und in jedem Knotenpunkt ist die Summe der Werte der einlaufenden Kanten gleich der Summe der Werte der auslaufenden Kanten (Kirchhoff'sches Gesetz).

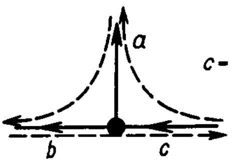

Abb. 3

Nun wird einem Wanderer der Auftrag erteilt, er soll - irgendwo beginnend -, etwa bei der Kante 9, entlang der Kanten wandern ohne Rücksicht auf die vorgeschriebene Richtung der Kanten. Jedesmal, wenn er zu einem vollausgefüllten Knotenpunkt kommt, soll er den rechten Weg weitergehen, und an den Knotenpunkten mit weißem Kern soll er die linken Kanten wählen. Man kann leicht erkennen, daß er erst dann wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkommt, wenn er jede Kante des Graphen genau zweimal, und zwar in beiden möglichen Richtungen, durchlaufen hat.

Wir verfolgen diese Wanderung und notieren jedesmal den Wert a der betretenen Kante, wenn ihre Orientierung mit der Wanderrichtung übereinstimmt; wenn nicht, so notieren wir $-a$. Wir erhalten eine Permutation

$$\ldots\ 8\ 27\ 7\ \overline{11}\ 6\ 26\ 5\ \overline{12}\ 4\ 25\ 3\ \overline{13}\ 9\ 19\ \bar{8}\ \overline{18}\ \bar{7}\ \ldots$$

aller Restklassen $\not\equiv 0 \pmod{55}$. Hierbei schreiben wir $\bar{a}$ statt $-a$. Diese wählen wir als 0-te Zeile des zu konstruierenden Schemas S_{55}.

Die i-te Zeile sei dadurch definiert: Sie geht aus der 0-ten durch Addition mit $+i$ hervor, wie im Schema S_7. Wir haben für S_{55} die Dreiecksregel zu beweisen.

In der 0-ten Zeile steht etwa

$$0. \; \ldots \; a \; c \; \ldots$$

so steht wegen des Kirchhoffschen Gesetzes (Abb. 3) für $a + b = c$ an anderer Stelle in der 0-ten Zeile außerdem

$$0. \; \ldots \; a \; c \; \ldots \; a \; b \; \ldots \; b \; c \; \ldots \; .$$

Es könnte auch zuerst der Term $b\ c$ und dann $a\ b$ stehen; dies spielt keine Rolle.

Durch Addition mit a oder mit c folgt, daß in der a-ten und c-ten Zeile steht:

$$a. \; \ldots \; 0 \; c \; \ldots$$
$$c. \; \ldots \; a \; 0 \; \ldots$$

Damit ist die Dreiecksregel für die 0-te Zeile nachgewiesen. Sie folgt durch Addition mit einem beliebigen Wert sofort auch allgemein. Dies war der Grundgedanke für die Konstruktion einer Einbettung des V_n in eine orientierbare Fläche mit nur Dreiecken im Fall $n \equiv 7 \pmod{12}$. Die anderen gelösten Fälle sind schwieriger; auch hier wird diese Idee in etwas abgewandelter Form verwendet.

Die beiden noch ungelösten Fälle $n \equiv 8$ und $11 \pmod{12}$ und der "halbe" Fall $14 \pmod{24}$ stoßen zur Zeit noch auf große Schwierigkeiten.

Seit August 1967 befindet sich der Verfasser für ein Jahr an der Universität Santa Cruz in Kalifornien, um gemeinsam mit J.W.T. YOUNGS in dieser Frage weitere Fortschritte zu erzielen.