Die Parametrizitätszahl eines Graphen

Alexander Rosa

Das Problem, mit dem wir uns beschäftigen wollen, hat seinen Ursprung in der Mechanik und wurde von F.EISINGER ursprünglich für Graphen statisch bestimmter Systeme formuliert. In diesem Beitrag wird das Problem verallgemeinert und der Begriff der Parametrizitätszahl eines Graphen eingeführt. *)

1

Unter einem Graphen versteht man stets einen endlichen ungerichteten Graphen ohne Schlingen und mehrfache Kanten.
Es sei s eine beliebige, jedoch festgewählte natürliche Zahl.
Wir sagen, daß der Graph G' aus dem Graphen G durch eine <u>$\overset{s}{V}$-Transformation im Knotenpunkte v</u> entsteht: $G' = \overset{s}{V}_v(G)$,

(1) wenn v vom Grade $\geq s$ ist, dann ist $G' = G$;

(2) wenn v vom Grade $< s$ ist, dann ist $G' = G - v$, d.h. G' ist der Graph, den man aus G durch Entfernung des Knotenpunktes v und aller mit ihm inzidenten Kanten erhält.

Wir benutzen die Bezeichnung

$$\overset{s}{V}_{v_k}(\overset{s}{V}_{v_{k-1}}(\ldots(\overset{s}{V}_{v_2}(\overset{s}{V}_{v_1}(G)))\ldots)) = \overset{s}{V}_{v_1 v_2 \ldots v_k}(G).$$

Wenn es im Graphen $\overset{s}{V}_{v_1 v_2 \ldots v_k}(G)$ keinen Knotenpunkt v gibt, so

daß $\quad \overset{s}{V}_{v_1 v_2 \ldots v_k v}(G) \neq \overset{s}{V}_{v_1 v_2 \ldots v_k}(G)$ gilt, werden wir

$$\overset{s}{V}_{v_1 v_2 \ldots v_k}(G) = \overset{s}{G}{}^{+}_{v_1 v_2 \ldots v_k} \quad \text{schreiben.}$$

---

*) Die Beweise aller in diesem Artikel enthaltenen Behauptungen sind in [1] zu finden.

Hilfssatz 1: Sind $\{v_i\}_1^k$ und $\{u_i\}_1^l$ zwei Knotenpunktfolgen des Graphen G derart, daß

$$\overset{s}{V}_{v_1 v_2 \dots v_k}(G) = \overset{s}{G}{}^{+}_{v_1 v_2 \dots v_k}$$

$$\overset{s}{V}_{u_1 u_2 \dots u_l}(G) = \overset{s}{G}{}^{+}_{u_1 u_2 \dots u_l} ,$$

dann ist

$$\overset{s}{G}{}^{+}_{v_1 v_2 \dots v_k} = \overset{s}{G}{}^{+}_{u_1 u_2 \dots u_l} .$$

Mit anderen Worten, zu jedem Graphen G gibt es einen eindeutig bestimmten Graphen $\overset{s}{G}{}^{+}$.

Definition 1: Ein Graph G besitzt die Eigenschaft O_s, wenn der Graph $\overset{s}{G}{}^{+}$ leer ist. (Der leere Graph hat die Eigenschaft O_s.)

Definition 2: Mit dem Symbol $p_s(G)$ bezeichnen wir die minimale Anzahl der Kanten, die man aus G entfernen muß, um einen Graphen mit der Eigenschaft O_s zu erhalten. (Für einen Graphen G mit der Eigenschaft O_s ist also $p_s(G) = 0$.)

Satz 1: Ein Graph G besitzt die Eigenschaft O_s dann und nur dann, wenn keiner seiner aufgespannten Teilgraphen den unteren Grad $\geq s$ hat. (Dabei ist der untere Grad des leeren Graphen als -1 angenommen.)

Setzen wir jetzt $s = 1$. Aus Satz 1 ergibt sich, daß die Graphen mit der Eigenschaft O_1 die Graphen ohne Kanten sind, und somit ist $p_1(G)$ gleich der Anzahl der Kanten des Graphen G.

Setzen wir jetzt $s = 2$. Da jeder Graph mit dem unteren Grad ≥ 2 einen Kreis besitzt, ergibt sich aus dem Satz 1, daß die Graphen mit der Eigenschaft O_2 die Graphen ohne Kreise (d.h. die Wälder) sind. Die Zahl $p_2(G)$ ist gleich der Anzahl der unabhängigen Kreise, d.h. der zyklomatischen Zahl des Graphen G.

Im weiteren werden wir uns mit dem Fall $s = 3$ beschäftigen und den Index s einfach fortlassen. Alle angeführten Ergebnisse kann man jedoch entweder unmittelbar oder mit unwesentlichen Änderungen auf den Fall einer beliebigen Zahl s verallgemeinern.

Also statt $p_3(G)$ werden wir nur $p(G)$ schreiben. Die Zahl $p(G)$ nennen wir die Parametrizitätszahl des Graphen G. Jede derartige Menge von $p(G)$ Kanten des Graphen G, so daß der durch ihre Entfernung entstandene Graph die Eigenschaft O besitzt, nennen wir eine T-Menge des Graphen G.

Das Problem kann man jetzt folgendermaßen formulieren: Für einen beliebigen Graphen G ist seine Parametrizitätszahl $p(G)$ zu bestimmen und mindestens eine seiner T-Mengen anzugeben.

Für einige Klassen von Graphen ist das Problem leicht lösbar.
So haben wir z.B.

Satz 2: (a) Es sei K_n der vollständige Graph mit n Knotenpunkten, dann ist

$$p(K_n) = \binom{n-2}{2} .$$

(b) Es sei $K_{m,n}$ der vollständige paare Graph $(m,n \geq 2)$, dann ist

$$p(K_{m,n}) = (m-2)(n-2) .$$

(c) Es sei $K_{q_1 q_2 \dots q_n}$ der Graph, dessen Knotenpunktmenge in n Klassen $V_1, V_2, \dots, V_n$ eingeteilt ist $(n \geq 3)$, wobei V_i genau q_i Knotenpunkte enthält und zwei Knotenpunkte genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie zu verschiedenen Klassen gehören.

Dann ist

$$p(K_{q_1 q_2 \dots q_n}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} q_i \cdot q_j - 2 \sum_{i=1}^{n} q_i + 3 .$$

Von Interesse kann noch das folgende Ergebnis sein:

Satz 3: Es sei G ein gegebener Graph und es sei d der untere Grad des Graphen G^+. Dann ist

$$p(G) \geq \binom{d-1}{2} .$$

Folgerung: Es sei G ein beliebiger Graph vom Grade s, dann ist

$$p(G) \geq \binom{s-1}{2}.$$

Bemerkung: Es ist leicht festzustellen, daß für $s \leq 3$ in dem letzten Ausdruck Gleichheit für einen beliebigen Graphen G vom Grade s besteht. Jedoch gilt für $s \geq 4$ im allgemeinen Falle die Gleichheit nicht mehr; andererseits zeigt uns die Formel für $p(K_n)$, daß im allgemeinen diese Schranke nicht zu verbessern ist.

Wir führen noch einige Bezeichnungen ein. Die Klasse aller Graphen mit dem unteren Grade 3 bezeichnen wir mit τ. Wir sagen, daß ein Graph G die Eigenschaft R (bzw. R') besitzt, wenn zwischen der Anzahl v seiner Knotenpunkte und der Anzahl h seiner Kanten die Beziehung $h = 2v - 3$ (bzw. $h \leq 2v - 3$) besteht.
Wir sagen, daß ein Graph zur Klasse ε gehört, wenn:

(1) G ein ebener, zusammenhängender Graph mit dem unteren Grade 3 ist;
(2) G die Eigenschaft R besitzt;
(3) jeder aufgespannte Teilgraph des Graphen G mit mindestens 4 Knotenpunkten die Eigenschaft R' besitzt.

Die Graphen aus ε sind die Graphen der sog. statisch bestimmten Systeme. Die Bestimmung der Parametrizitätszahl der Graphen aus ε ist von Bedeutung für die Berechnung und Lösung dieser Systeme.

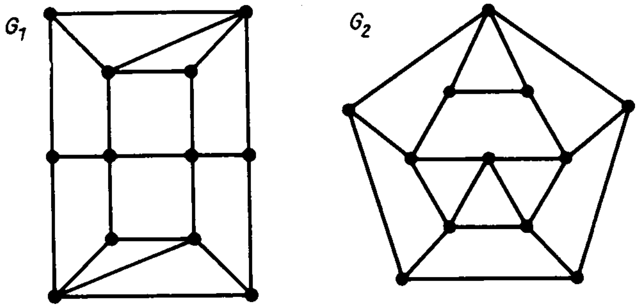
Satz 4: Es sei G aus τ und es bilden die Knotenpunkte dritten Grades eine äußerlich stabile Menge des Graphen G. Wir bezeichnen mit G_i den Graphen, der aus G durch die Entfernung des Knotenpunktes v_i entsteht. Dann gilt:

$$p(G) = 1 + \min_i p(G_i).$$

Bemerkung 1: Die Behauptung des Satzes ist mit folgendem äquivalent: Es gibt eine T-Menge U des Graphen G mit den angeführten Eigenschaften, so daß mindestens eine Kante aus U mit mindestens einem Knotenpunkt 3. Grades in G inzidiert.

Bemerkung 2: An einem Beispiel kann gezeigt werden, daß die Bedingung, daß die Knotenpunkte dritten Grades eine äußerlich stabile Menge bilden, nicht wegzulassen ist. Wenn man jedoch die Klasse τ durch ε ersetzt, bleibt die Frage über die Möglichkeit einer Fortlassung dieser Bedingung offen.

Bemerkung 3: Die Parametrizitätszahl eines Graphen kann nicht ausschließlich mit Hilfe der Anzahl der Knotenpunkte, Kanten , Komponenten u.ä. ausgedrückt werden (wie es etwa bei der zyklomatischen Zahl der Fall ist), wie das folgende Beispiel zeigt:



Beide Graphen gehören zu ε, haben dieselbe Anzahl von Knotenpunkten (12), von Kanten (21), dieselbe Partition (6 Knotenpunkte vom Grade 3, 6 vom Grade 4), aber $p(G_1) = 2$ und $p(G_2) = 1$.

2

In diesem Teil beschreiben wir einen Algorithmus zur Bestimmung der Parametrizitätszahl und einer T-Menge für Graphen aus τ.

Es sei G aus τ und es sei h_G der obere Grad von G, $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ die Knotenpunktmenge von G.

B e z e i c h n u n g 1 : A. Mit G_i bezeichnen wir den Graphen, den man aus G durch die Entfernung des Knotenpunktes v_i erhält.

B. Mit $G_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$ bezeichnen wir den Graphen, den man aus dem Graphen $G^+_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ durch die Entfernung des Knotenpunktes v_{i_k} erhält.

B e z e i c h n u n g 2 : $V_3(G)$ bezeichne eine beliebige festgewählte Menge der Knotenpunkte vom Grade 3 des Graphen G, die genau je einen Knotenpunkt aus jeder Komponente D_i des von den Knotenpunkten 3. Grades aufgespannten Teilgraphen $D(G)$ enthält. $V_s(G)$, $s = 4,\dots, h_G$, bezeichne die Menge aller Knotenpunkte vom Grade s des Graphen G, die mit keinem Knotenpunkt vom Grade 3 benachbart sind. Ferner sei

$$W(G) = \bigcup_{s=3}^{h_G} V_s(G) .$$

B e z e i c h n u n g 3 : Mit I_G bezeichnen wir das System aller Knotenpunktfolgen $\{v_{i_1}, v_{i_2},\dots,v_{i_z}\}$ des Graphen G mit der Eigenschaft, daß $p(G_{i_1 i_2 \dots i_{z-1} i_z}) = 0$, aber $p(G_{i_1 i_2 \dots i_{z-1}}) \neq 0$ wobei $v_{i_j} \in W(G^+_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}})$, $j = 1, 2,\dots, z$.

Da G ein endlicher Graph ist, ist jede Folge aus I_G und das System I_G selbst endlich (dabei ist z im allgemeinen Falle veränderlich).

Satz 5: Es sei jeder Folge $S = \{v_{i_1}, v_{i_2},\dots, v_{i_z}\}$ des Systems I_G des Graphen G aus τ die Zahl $\mu(S)$ zugeordnet:

$$\mu(S) = r_1 + r_2 + \dots + r_z - 2z ,$$

wo r_j der Grad des Knotenpunktes v_{i_j} im Graphen $G^+_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}}$ ist.

Dann ist

$$p(G) = \min_{S \in I_G} \mu(S).$$

Dieser Satz ermöglicht uns die praktische Berechnung der Zahl $p(G)$ des Graphen G z.B. folgendermaßen:

Aus G bilden wir die Menge der Graphen G^1: $G^1 = \{G_i | v_i \in W(G)\}$.

Die Menge G^1 zerlegen wir in zwei disjunkte Untermengen: $G^1 = \bar{G}^1 + \tilde{G}^1$, wo $\bar{G}^1 = \{G_i | v_i \in W(G),\ p(G_i) \neq 0\}$, $\tilde{G}^1 = \{G_i | v_i \in W(G),\ p(G_i) = 0\}$. Ist $G_i \in \tilde{G}^1$ für irgendein v_i, wird die Folge $\{v_i\}$ zu I_G gehören; auf diese Weise bekommen wir alle aus einem Element bestehenden Folgen, die zu I_G gehören.

Weiter bilden wir die Menge der Graphen G^2:

$G^2 = \{G_{i_1 i_2} | G_{i_1} \in \bar{G}^1, \ v_{i_2} \in W(G^+_{i_1})\}$; $G^2 = \bar{G}^2 + G^2$, wo

$\bar{G}^2 = \{G_{i_1 i_2} | G_{i_1 i_2} \in G^2, \ p(G_{i_1 i_2}) \neq 0\}$; $\tilde{G}^2 = \{G_{i_1 i_2} | G_{i_1 i_2} \in G^2,$ $p(G_{i_1 i_2}) = 0\}$.

Ist $G_{i_1 i_2} \in \tilde{G}^2$ für irgendein v_{i_2}, wird die Folge $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$ zu I_G gehören; auf diese Weise bekommen wir alle aus zwei Elementen bestehenden Folgen, die zu I_G gehören.

Weiter bilden wir die Menge $G^3 = \{G_{i_1 i_2 i_3} | G_{i_1 i_2} \in \bar{G}^2,$ $v_{i_3} \in W(G^+_{i_1 i_2})\}$, $G^3 = \bar{G}^3 + \tilde{G}^3$ usw. So gehen wir vor, bis wir $\bar{G}^k = \emptyset$ für irgendein k haben. Beim letzten Schritt erhalten wir alle aus k Elementen bestehenden Folgen, die zu I_G gehören. Das System I_G ist für Graphen aus τ nichtleer.

Für jede Folge $S \in I_G$ bilden wir die Zahl $\mu(S)$ und bestimmen $p(G)$ als die kleinste dieser Zahlen. Ist $S^0 = \{v^0_1, v^0_2, \dots, v^0_z\}$ eine der Folgen aus I_G, der die minimale Zahl

$$\mu(S^0) = r^0_1 + r^0_2 + \dots + r^0_z - 2z$$

entspricht, so ist offenbar jede aus $\mu(S^0)$ Kanten bestehende Menge, die für jedes $j = 1, \dots, z$ beliebige $r^0_j - 2$ mit dem Knotenpunkte v_j im Graphen $G^+_{1,2,\dots,j-1}$ inzidente Kanten enthält, eine T-Menge des Graphen G.

Bemerkung: Bei der Bestimmung der Zahl $p(G)$ kann es offenbar vorkommen, daß es nicht notwendig ist, alle Folgen aus I_G zu konstruieren. Ist z.B. $\{v\} \in I_G$ und ist r der Grad von v in G, dann genügt es, alle Folgen aus I_G mit höchstens $r-3$ Elementen zu konstruieren.

Das ergibt sich daraus, daß $\mu(S) = r_1 + r_2 + \dots + r_z - 2z \geq 3z - 2z = z$ für jedes $S = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_z}\} \in I_G$ ist (da $r_j \geq 3$), und in unserem Falle ist offenbar $p(G) \leq \mu(\{v\}) = r - 2$. Ähnlich, ist $\{v_1, v_2\} \in I_G$ und sind r_1, r_2 die Grade der Knotenpunkte v_1 bzw. v_2 im Graphen G bzw. im Graphen G^+_1, so genügt es, alle Folgen aus I_G mit höchstens $r_1 + r_2 - 5$ Elementen zu konstruieren usw.

Literatur

[1] Eisinger, F.; Rosa, A.: Die Parametrizitätszahl der Graphen und statisch bestimmter Systeme, eingesandt an Aplikace matematiky.