Existenz und Struktur selbstadjungierter Graphen

Gert Sabidussi

Jedem ungerichteten Graphen X kann ein adjungierter Graph ∂X (= Kantenmittengraph) wie folgt zugeordnet werden: die Knotenpunkte von ∂X sind die Kanten von X, und zwei Kanten k, k' von X sind in ∂X durch eine Kante genau dann verbunden, wenn k und k' in X benachbart sind, d.h. k und k' sind voneinander verschieden und haben einen gemeinsamen Endpunkt. Die im folgenden betrachteten Graphen sind schlicht, haben also keine Schlingen oder Mehrfachkanten.

Ein Graph X heißt selbstadjungiert, wenn $\partial X \cong X$ gilt. Beispiele solcher Graphen sind etwa die Polygone und (einseitig oder zweiseitig) unendlichen Wege. Diese Graphen sind zusammenhängend; nicht zusammenhängende selbstadjungierte Graphen erhält man durch Bildung disjunkter Vereinigungen von zusammenhängenden selbstadjungierten Graphen. Darüber hinaus existieren noch andere Beispiele, etwa die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{n \geq 0} W_n$, wobei W_n ein Weg von der Länge n ist.

Es ist vermutet worden, daß Polygone und unendliche Wege die einzigen zusammenhängenden selbstadjungierten Graphen sind. Dies läßt sich in der Tat beweisen, wenn man die zusätzliche Voraussetzung macht, daß die betrachteten Graphen lokalfinit sind (d.h. jeder Knotenpunkt endlichen Grad hat). Läßt man diese Annahme jedoch fallen, so kann man zeigen:

> Satz 1: Zu jeder unendlichen Kardinalzahl n existieren unendlich viele nicht isomorphe zusammenhängende selbstadjungierte Graphen der Ordnung n.

Die Konstruktion solcher Graphen soll im folgenden kurz skizziert werden.

Es seien zwei Graphen X, Y gegeben. Eine Abbildung $f: P(X) \longrightarrow P(Y)$ (P = Punktmenge) heißt ein Homomorphismus, wenn $[fx,fy] \in K(Y)$ für jede Kante $[x,y] \in K(X)$ (K = Kantenmenge). Um anzudeuten, daß f ein Homomorphismus ist, schreiben wir $f: X \longrightarrow Y$. Ein eineindeutiger Homomorphismus heißt ein Monomorphismus.

Wir betrachten zunächst allgemein ein injektives System von Graphen und Homomorphismen. Gegeben sei (i) eine Familie $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Graphen (wobei I eine nach oben gerichtete Indexmenge mit einer Quasiordnung $\leq$ ist) und (ii) für jedes Paar $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha \leq \beta$ ein Homomorphismus $f_{\alpha\beta}: X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ mit den Eigenschaften, daß $f_{\alpha\alpha}$ = Identität und $f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$ mit $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. S sei die Summe der Graphen X_α, d.h.

$$P(S) = \bigsqcup_{\alpha \in I} (P(X_\alpha) \times \{\alpha\}) \, ,$$

$$K(S) = \{[(h,\alpha), (k,\beta)] : \alpha = \beta, \ [h,k] \in K(X_\alpha)\} .$$

Auf $P(S)$ definieren wir eine Relation R durch $(x,\alpha)\ R\ (y,\beta)$ genau dann, wenn ein $\gamma \geq \alpha,\beta$ existiert, so daß $f_{\alpha\gamma}x = f_{\beta\gamma}y$. Man überzeugt sich leicht, daß R eine Äquivalenzrelation ist. Der Quotientengraph

$$L = S/R$$

heißt der injektive Limes des gegebenen Systems. Die Knotenpunkte von L, d.h. die Äquivalenzklassen von $P(S)$ modulo R sollen mit $(x,\alpha)^*$ bezeichnet werden, wobei $x \in P(X_\alpha)$.

Eine Folge X_i, $i = 0,1,\ldots$, von Graphen zusammen mit einer Folge von Homomorphismen $f_i: X_i \longrightarrow X_{i+1}$ induziert ein injektives System, wenn man setzt: f_{ii} = Identität, $i = 0,1,\ldots$, und $f_{ij} = f_{j-1} \circ \ldots \circ f_i$ für $i < j$. Von dieser Möglichkeit machen wir nun wie folgt Gebrauch.

D e f i n i t i o n : Ein zulässiger Graph ist ein Paar (X,f), wobei X ein Graph im üblichen Sinn ist, und $f: X \longrightarrow \partial X$ ein Monomorphismus. X selbst soll ein zulässiger Graph heißen, wenn ein solcher Monomorphismus existiert.

Bevor wir auf die Existenz zulässiger Graphen eingehen, sei folgendes bemerkt. Jeder Homomorphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ induziert eine Abbildung $f^{\#}\colon K(X) \longrightarrow K(Y)$ vermöge der Gleichung

$$f^{\#}[x,y] = [fx,fy], \quad [x,y] \in K(X).$$

Mit anderen Worten, $f^{\#}$ ist eine Abbildung von $P(\partial X)$ nach $P(\partial Y)$ und es erhebt sich die Frage, ob $f^{\#}$ wiederum ein Homomorphismus ist. Die Antwort ist im allgemeinen negativ; ist aber $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Monomorphismus, so ist $f^{\#}\colon \partial X \longrightarrow \partial Y$ ebenfalls ein Monomorphismus.

Ist nun (X,f) ein zulässiger Graph, so induziert nach dem soeben Gesagten der Monomorphismus $f\colon X \longrightarrow \partial X$ einen Monomorphismus $f^{\#}\colon \partial X \longrightarrow \partial^2 X$, dieser wieder einen Monomorphismus $f^{\#\#}\colon \partial^2 X \longrightarrow \partial^3 X$, usw. Es entsteht also eine Folge von Graphen und Monomorphismen

$$X \xrightarrow[f]{} \partial X \xrightarrow[f^{\#}]{} \partial^2 X \xrightarrow[f^{\#\#}]{} \partial^3 X \longrightarrow \cdots$$

deren zugehöriger injektiver Limes als der durch (X,f) induzierte Limes bezeichnet werden soll.

<u>Satz 2:</u> L ist selbstadjungiert.

B e w e i s : Man setze $f_0 = f$, $f_i = f^{\#}_{i-1}$, $i \geq 1$. Für $x \in P(\partial^i X)$ ist $f_i x \in P(\partial^{i+1} X)$, d.h. eine Kante von $\partial^i X$, etwa $f_i x = [y_x, z_x]$, sobei y_x, z_x Knotenpunkte von $\partial^i X$ sind. Definiert man nun $s\colon L \longrightarrow \partial L$ durch

$$s(x,i)^* = [(y_x,i)^*, [z_x,i)^*],$$

so kann man unschwer verifizieren, daß die Abbildung s in der Tat ein Isomorphismus ist.

In Anbetracht von Satz 2 ist die Existenz beliebig großer selbstadjungierter Graphen bewiesen, wenn man zeigt, daß für beliebiges unendliches n zulässige Graphen der Ordnung n tatsächlich existieren. Daß kein Mangel an zulässigen Graphen herrscht, beweisen die folgenden drei Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Enthält ein Baum X einen unendlichen Weg, so ist X ein zulässiger Graph.

B e w e i s : Es sei $W = [x_0, x_1, \ldots]$ ein einseitig unendlicher Weg in X, k_i die Kante $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots$. Man setze $fx_i = k_i$, $i \geq 0$, $fx = k_x$, wobei $x \notin P(W)$ und k_x die mit x inzidente in Richtung W führende Kante von X ist. Dann ist $f\colon X \longrightarrow \partial X$ ein Monomorphismus.

Fast wörtlich den gleichen Beweis hat

Hilfssatz 2: Jeder unizyklische Graph ist zulässig.

Ein Graph heißt unizyklisch, wenn er zusammenhängend ist und genau einen endlichen Kreis enthält.

Hilfssatz 3: Es sei X ein unendlicher Graph der Ordnung n, x ein Knotenpunkt von X vom Grad n. Dann ist X zulässig.

B e w e i s : Es sei K_x der volle Teilgraph von ∂X, dessen Knotenpunkte die mit x inzidenten Kanten von X sind. K_x ist ein vollständiger Graph der Ordnung n und enthält daher ein isomorphes Bild eines jeden Graphen der Ordnung n. Insbesondere kann X selbst auf einen Teilgraphen von K_x und damit auf einen Teilgraphen von ∂X abgebildet werden.

Ein Beispiel eines Graphen mit den in Hilfssatz 3 verlangten Eigenschaften ist der vollständige n-Graph K_n für unendliches n.

Um den Beweis von Satz 1 zu vervollständigen, ist es noch nötig zu zeigen, daß man unendlich viele nicht isomorphe selbstadjungierte Graphen mit gegebener unendlicher Ordnung finden kann. Zu diesem Zweck kann man fragen, ob es möglich ist, daß bei gegebener Ordnung selbstadjungierte Graphen existieren, die Knotenpunkte endlichen Grades enthalten. Darüber gibt Auskunft der

Satz 3: Es sei L ein zusammenhängender selbstadjungierter Graph, der einen Knotenpunkt endlichen Grades enthält. Dann ist L entweder ein Polygon oder ein unendlicher Weg, oder

$L = R \cup S$, wobei $R = [x_0, x_1, \ldots]$ ein einseitig unendlicher Weg ist, $R \cap S = x_0$ gilt, und S ein 2-fach zusammenhängender Graph ist, in dem alle von x_0 verschiedenen Knotenpunkte unendlichen Grad haben. Der dritte Fall kann tatsächlich auftreten und man kann es so einrichten, daß der Knotenpunkt x_0 beliebigen endlichen oder unendlichen Grad ≥ 3 hat.

Auf den Beweis von Satz 3 muß hier wegen seiner Länge verzichtet werden.