Ein von Kozyrev und Grinberg angegebener nicht-hamiltonscher kubischer planarer Graph*)

Horst Sachs

1. Ein Graph heißt zyklisch p-fach kantenzusammenhängend, wenn es nicht möglich ist, ihn durch Löschen von weniger als p Kanten in zwei getrennte Teile zu zerlegen, von denen jeder einen Kreis enthält.

1884 formulierte P.G. TAIT [1] die Vermutung, daß jeder zyklisch 3-fach kantenzusammenhängende planare kubische Graph einen hamiltonschen Kreis (einen Kreis, der alle Knotenpunkte enthält) besitze.

2. Die Vermutung von TAIT wurde erst 1946 von TUTTE [2] durch Angabe eines zyklisch genau 3-fach kantenzusammenhängenden planaren kubischen Graphen ohne hamiltonschen Kreis widerlegt, und 1960 publizierte der gleiche Autor [3] ein Beispiel eines planaren kubischen nicht-hamiltonschen Graphen, welcher zyklisch genau 4-fach kantenzusammenhängend ist.

Mit der systematischen Konstruktion nicht-hamiltonscher planarer kubischer Graphen beschäftigen sich auch KOTZIG und BOSÁK [4]; vgl. auch GRÜNBAUM und MOTZKIN [5].

3. Mittels der Eulerschen Formel ist leicht einzusehen, daß ein kubischer planarer Graph zyklisch nicht mehr als 5-fach kantenzusammenhängend sein kann.

1965 gelang es WALTHER [6], [7], [8], einen zyklisch 5-fach zusammenhängenden planaren kubischen nicht-hamiltonschen Graphen mit 114 Knotenpunkten zu konstruieren.

---

*) Dieser Vortrag wurde anstelle eines Vortrages gehalten, den Herr Kozyrev, der an der Tagung nicht persönlich teilnehmen konnte, angekündigt hatte.

4. Im August 1966 teilte mir Herr VIKTOR KOZYREV aus Moskau mündlich mit, daß Herr GRINBERG aus Riga ein (nicht-publiziertes) Beispiel eines zyklisch 5-fach zusammenhängenden planaren kubischen nicht-hamiltonschen Graphen G^0 mit nur 46 Knotenpunkten angeben könne, und auf Grund der mir von Herrn KOZYREV genannten Beweisidee war ich in der Lage, den fraglichen Graphen G^0 ohne Mühe zu rekonstruieren.

Diese Idee und der Graph G^0 werden im Folgenden wiedergegeben.

5. Der planare kubische Graph G besitze einen hamiltonschen Kreis H. Wird G auf der Kugel (dem Globus) gezeichnet, so entsteht eine "normale Landkarte" L.

n sei die Anzahl der Knotenpunkte von G,
f_i sei die Anzahl der i-Ecke
(= Länder mit i Grenzen) von L $(i = 2,3,\ldots)$.

Wir denken H zum Äquator des Globus gemacht.

f_i' sei die Anzahl der i-Ecke auf der nördlichen,
f_i'' sei die Anzahl der i-Ecke auf der südlichen Halbkugel,

so daß

$$0 \leq f_i' \leq f_i, \quad 0 \leq f_i'' \leq f_i, \quad f_i' + f_i'' = f_i. \tag{1}$$

Der zu G gehörige duale Graph D auf der Kugel wird durch H in zwei Bäume zerlegt: in einen nördlichen Baum B' und einen südlichen B''. Die Endknotenpunkte (= Knotenpunkte vom Grade 1) von B' sind die n Schnittpunkte der Kanten von D mit H; außer diesen hat B' genau je f_i' Knotenpunkte vom Grade i $(i = 2,3,\ldots)$. B' habe N' Knotenpunkte und K' Kanten. Dann ist

$$N' = \Sigma f_i' + n,$$

und durch Abzählung der Kantenansätze von B' erhalten wir

$$2K' = \Sigma i f_i' + n.$$

Ferner gilt, da B' ein Baum ist,

$$K' = N' - 1,$$

und durch Elimination von N' und K' ergibt sich aus den letzten drei Gleichungen

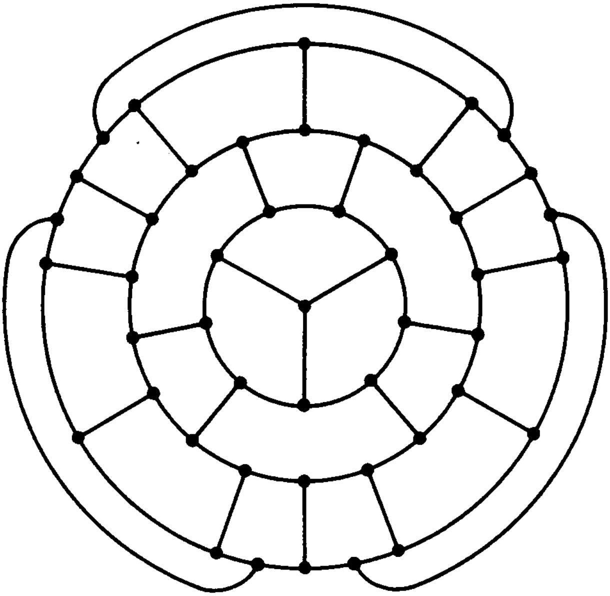
$$\Sigma(i - 2)\, f_i' = n - 2.$$

Entsprechend finden wir auch

$$\Sigma(i - 2)\, f_i'' = n - 2,$$

so daß

$$\Sigma(i - 2)\, f_i' = \Sigma(i - 2)\, f_i''. \qquad (2)$$



6. Betrachten wir nun den oben gezeichneten Graphen G^o. Dieser ist, wie man aufgrund der großen Symmetrie leicht einsieht, zyklisch 5-fach kantenzusammenhängend. Angenommen, G^o besitze einen Hamiltonkreis. Dann gelten (1) und (2) mit geeigneten ganzen Zahlen

f_i', f_i'', wobei

$f_5 = 21$, $f_8 = 3$, $f_9 = 1$;

$f_i = 0$ für $i \neq 5, 8, 9$.

Daraus folgt

$f_i' = f_i'' = 0$ für $i \neq 5, 8, 9$, und (2) reduziert sich zu

$$3f_5' + 6f_8' + 7f_9' = 3f_5'' + 6f_8'' + 7f_9'' \,.$$

Hieraus ergibt sich

$$f_9' \equiv f_9'' \mod 3;$$

aber das ist unmöglich, denn wegen

$$f_9' + f_9'' = f_9 = 1$$

ist notwendig eine der Zahlen f_9', f_9'' gleich 1 und die andere gleich 0.
Folglich kann G^0 keinen Hamiltonkreis besitzen.

Literatur

[1] Tait, P.G.: Listings Topologie; Phil. Mag. (5), 17 (1884), 30-36; Scientific papers vol. II, 85 - 98.

[2] Tutte, W.T.: On Hamiltonian circuits, J. London Math. Soc. 21 (1946), 98 - 101.

[3] Tutte, W.T.: A non Hamiltonian planar graph; Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 371-375.

[4] Bosák, J.: Hamiltonian lines in cubic graphs, "Théorie des Graphes, journées internationales d'étude, Rome, juillet 1966" (Paris-New York 1967), 35-46.

[5] Grünbaum, B.; Motzkin, T.S.: Longest simple paths in polyhedral graphs, J. London Math. Soc. 37 (1962), 152-160.

[6] Walther, H.: Ein kubischer, planarer, zyklisch fünffach zusammenhängender Graph, der keinen Hamiltonkreis besitzt. Wiss. Z. TH Ilmenau 11 (1965), 163-166.

[7] Walther, H.: Über das Problem der Existenz von Hamiltonkreisen in planaren regulären Graphen der Grade 3, 4 und 5. Diss. TH Ilmenau, 1966.

[8] Walther, H.: Über das Problem der Existenz von Hamiltonkreisen in planaren, regulären Graphen (erscheint in "Mathematische Nachrichten").