Konstruktion von Graphen mit gewissen Färbungseigenschaften

Horst Sachs, Manfred Schäuble

Alle im folgenden betrachteten Graphen seien endlich und schlicht (d.h. ohne Schlingen und Mehrfachkanten). $\langle p \rangle$ bezeichne den vollständigen Graphen mit p Knotenpunkten. Ein Graph G heiße monochrom gefärbt, wenn alle seine Knotenpunkte die gleiche Farbe haben. Es sei p eine natürliche Zahl ≥ 2. Dann sagen wir, G sei mit den Farben $1,2,\ldots,h$ p-zulässig gefärbt, wenn jeder seiner Knotenpunkte eine der Farben $1, 2, \ldots, h$ hat und G keinen monochrom gefärbten, zu $\langle p \rangle$ isomorphen Untergraphen enthält.

$\chi_p(G)$ sei die kleinste Anzahl von Farben, mit denen G p-zulässig gefärbt werden kann. Offenbar ist $\chi_2(G) = \chi(G)$ die chromatische Zahl von G.

Bekanntlich gilt:

Zu jeder natürlichen Zahl k existiert ein dreiecksloser Graph G mit der chromatischen Zahl k. 1)

Im folgenden soll ein entsprechender Satz für p-zulässige Färbungen durch effektive Konstruktion bewiesen werden.

Satz: Zu jedem Tripel natürlicher Zahlen $p \geq 2$, $k \geq 1$, $K \geq k$ läßt sich ein schlichter Graph G mit folgenden Eigenschaften angeben:

(1) G enthält keinen zu $\langle p+1 \rangle$ isomorphen Untergraphen;

---

1) Dieser Satz wurde mittels konstruktiver und anderer Methoden mehrfach bewiesen (Zykov [1]; Tutte [2]; Mycielski [3]; Erdős [4],[5]) und in verschiedener Hinsicht verallgemeinert (Tutte [6], Kelly-Kelly [7], Nešetřil [8], Erdős [5], Erdős-Hajnal [9]; siehe auch die Arbeit von Herrn Lovász in diesem Buch). ([2] war uns nicht zugänglich.)

(2) $\chi_p(G) = k$;

(3) bei jeder p-zulässigen Färbung mit (nicht mehr als) K Farben enthält G mindestens k paarweise verschieden monochrom gefärbte, zu $\langle p-1 \rangle$ isomorphe Untergraphen.

Ein Graph mit den Eigenschaften (1) und (2) heiße ein (p,k)-Graph.

B e w e i s des Satzes mittels Induktion nach p:
Für $p = 2$, alle k und alle $K \geq k$ ist der Satz richtig, da er dann nichts anderes aussagt als der eingangs zitierte Satz über dreieckslose Graphen.

Wir nehmen an (1. Induktionsannahme):

(I) Der Satz sei schon bewiesen für $p = 2, 3, \ldots, P$ $(P \geq 2)$ und jeweils alle k und alle $K \geq k$.

Wir werden zeigen, daß er auch für $p = P + 1$ und alle k sowie alle $K \geq k$ richtig ist.

Es sei K eine beliebige (aber im folgenden festzuhaltende) natürliche Zahl. Wir konstruieren zu jeder der Zahlen $k = 1, 2, \ldots, K$ je einen Graphen G_k mit folgenden Eigenschaften:

(1') G_k enthält keinen zu $\langle P+2 \rangle$ isomorphen Untergraphen;
(2') $\chi_{P+1}(G_k) = k$;
(3') bei jeder (P+1)-zulässigen Färbung mit K (oder weniger) Farben enthält G_k k paarweise verschieden monochrom gefärbte, zu $\langle P \rangle$ isomorphe Untergraphen.

Induktion nach k:
Nach (I) existiert ein (P,K+1)-Graph G^o.
Es gilt:

(1") G^o enthält keinen zu $\langle P+1 \rangle$, also auch keinen zu $\langle P+2 \rangle$ isomorphen Untergraphen;
(2") wegen (1") ist trivialerweise $\chi_{P+1}(G^o) = 1$;
(3") wegen $\chi_P(G^o) = K+1$ enthält G^o bei jeder Färbung mit K (oder weniger) Farben mindestens einen monochrom gefärbten, zu $\langle P \rangle$ isomorphen Untergraphen.

Ein Graph G_1 (nämlich G^0) mit den Eigenschaften (1'), (2'), (3') läßt sich also angeben.

Wir nehmen an (2. Induktionsannahme):

(II) Ein Graph G_k mit den Eigenschaften (1'), (2'), (3') existiere für $k = 1, 2, \ldots, l$ $(1 \leq l \leq K-1)$.

Wir werden zeigen, daß dann auch ein Graph G_{l+1} mit den Eigenschaften (1'), (2'), (3') existiert.
Wir nehmen l zu G_l isomorphe Graphen $G_l^1, G_l^2, \ldots, G_l^l$ (man könnte auch, um Knotenpunkte einzusparen, l beziehentlich zu $G_1, G_2, \ldots, G_l$ isomorphe Graphen nehmen). Jedem System von je l zu $\langle P \rangle$ isomorphen, paarweise in verschiedenen der G_l^λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ enthaltenen Untergraphen ordnen wir einen neuen Knotenpunkt zu und verbinden ihn mit allen Knotenpunkten aller Untergraphen des Systems.

Die neu hinzugenommenen Knotenpunkte bilden eine Menge M_l. Der durch die angegebene Konstruktion aus G_l und M_l entstehende Graph heiße $\tilde{G}_l$; er enthält im allgemeinen viele zu $\langle P+1 \rangle$, aber keinen zu $\langle P+2 \rangle$ isomorphen Untergraphen.

G_l^* sei ein - nach (I) sicher existierender - $(P,K-l+1)$-Graph mit t Knotenpunkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$. Wir nehmen t zu $\tilde{G}_l$ isomorphe Graphen $\tilde{G}_l^1, \tilde{G}_l^2, \ldots, \tilde{G}_l^t$. Die G_l^λ und M_l entsprechenden Gebilde von $\tilde{G}_l^\tau$ seien mit $G_l^{\lambda\tau}$ bzw. M_l^τ bezeichnet.

Wir verbinden zwei Knotenpunkte aus M_l^σ und M_l^τ $(\sigma, \tau = 1,2,\ldots,t;$ $\sigma \neq \tau)$ genau dann, wenn Q_σ und Q_τ in G_l^* verbunden sind; weitere Kanten werden nicht eingeführt. Der entsprechende Graph H hat folgende Eigenschaften:

(1''') H enthält keinen zu $\langle P+2 \rangle$ isomorphen Untergraphen;
(2''') $\chi_{P+1}(H) = l+1$;
(3''') H enthält bei jeder $(P+1)$-zulässigen Färbung mit K (oder weniger) Farben $l+1$ paarweise verschieden monochrom gefärbte, zu $\langle P \rangle$ isomorphe Untergraphen.

B e w e i s : (1''') ist auf Grund der Konstruktion unmittelbar klar.

(2'''): (a) Angenommen, H sei mit l Farben $(P+1)$-zulässig färbbar; wir betrachten eine solche Färbung mit den Farben $1, 2, \dots, l$. Dann ist auch jeder der Untergraphen $\tilde{G}_l^\tau$ ($\tau = 1,2, \dots, t$) und hierin wieder jeder zu G_l isomorphe Untergraph $G_l^{\lambda\tau}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$) mit l Farben $(P+1)$-zulässig gefärbt.

Wegen (II) hat jeder der $G_l^{\lambda\tau}$ die Eigenschaft (3') (mit $k = l$), enthält also l paarweise verschieden monochrom gefärbte, zu $\langle P \rangle$ isomorphe Untergraphen. Es gibt in M_l^τ einen Knotenpunkt, der gleichzeitig für $\lambda = 1, 2, \dots, l$ mit allen Knotenpunkten eines in $G_l^{\lambda\tau}$ enthaltenen monochrom mit der Farbe λ gefärbten zu $\langle P \rangle$ isomorphen Untergraphen verbunden ist. Da dieser Knotenpunkt eine der Farben $1, 2, \dots, l$ hat, gibt es in $\tilde{G}_l^\tau$ doch einen monochrom gefärbten, zu $\langle P+1 \rangle$ isomorphen Untergraphen – im Widerspruch zur Annahme.

(b) Eine $(P+1)$-zulässige Färbung mit $l+1$ Farben erhält man auf folgende Weise:

Man färbe alle in H enthaltenen $G_l^{\lambda\tau}$ mit den Farben $1, 2, \dots, l$ $(P+1)$-zulässig (das ist möglich, denn wegen (II) gilt: $\chi_{P+1}(G_l^{\lambda\tau}) = \chi_{P+1}(G_l) = l$) und gebe allen übrigen Knotenpunkten von H (also allen in den M_l^τ enthaltenen Knotenpunkten) die Farbe $l+1$. Da jeder zu $\langle P+1 \rangle$ isomorphe Untergraph ganz in einem der $\tilde{G}_l^\tau$ liegt, entsteht auf diese Weise kein monochrom gefärbter $\langle P+1 \rangle$.

Aus (a) und (b) folgt (2'''):

(3'''): Angenommen, (3''') sei falsch. H sei mit K (oder weniger) Farben $(P+1)$-zulässig so gefärbt, daß keine $l+1$ paarweise verschieden monochrom gefärbte zu $\langle P \rangle$ isomorphe Untergraphen auftreten. In jedem der $G_l^{\lambda\tau}$ sind dann (wegen (II) gemäß Eigenschaft (3') von G_l) l paarweise verschieden monochrom gefärbte, zu $\langle P \rangle$ isomorphe Untergraphen enthalten. Dabei kommen in allen $G_l^{\lambda\tau}$ dieselben l Farben vor; wir dürfen annehmen, daß diese die Farben $1, 2, \dots, l$ sind.

Da die Färbung $(P+1)$-zulässig ist, kommt in jedem der M_l^τ mindestens ein Knotenpunkt vor, der keine der Farben $1, 2, \ldots, l$, also eine der Farben $l+1, \ldots, K$ hat. Aus jedem der M_l^τ sei ein solcher Knotenpunkt Q_τ^* ausgewählt. Die Q_τ^* spannen in H einen zu G_l^* isomorphen Graphen $\bar{G}_l^*$ auf, welcher mit $K-l$ Farben gefärbt ist. Da G_l^* ein $(P,K-l+1)$-Graph ist, enthält $\bar{G}_l^*$ mindestens einen zu $\langle P \rangle$ isomorphen Untergraphen, welcher monochrom gefärbt ist, und zwar mit einer der Farben $l+1, \ldots, K$. Damit sind doch $l+1$ paarweise verschieden monochrom gefärbte, zu $\langle P \rangle$ isomorphe Untergraphen gefunden - im Widerspruch zur Annahme.

Es ist also gezeigt:
Der Graph H hat die Eigenschaften (1'), (2'), (3') mit $k = l+1$, ein Graph G_{l+1} ist somit konstruiert.

Mittels der Induktionen nach k (bei beliebigem K) und p ist damit der Satz bewiesen.

Bemerkung: Auch aus der von L. LOVASZ vorgetragenen Konstruktion für Mengensysteme ("Graphs and set-systems", dieses Buch) läßt sich die Existenz von (p,k)-Graphen für beliebige $p \geq 2$, $k \geq 1$ herleiten.

Literatur

[1] Zykov, A.A.: Über einige Eigenschaften linearer Komplexe (Russisch). Mat. Sbornik, N.S. 24 (66) (1949), 163-188.

[2] Blanche Descartes: A three colour problem. Eureka (April 1947, Solution March 1948).

[3] Mycielski, J.: Sur le coloriage des graphes. Colloquium Math. 3 (1955), 161-162.

[4] Erdős, P.: Remarks on a theorem of Ramsay. Bull. Res. Council of Israel, 7 F (1957), 21-24.

[5] Erdős, P.: Graph theory and probability II. Canad. J. Math. 11 (1959), 34-38.

[6] Blanche Descartes: Solution to Advanced Problem Nr. 4526, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 352.

[7] Kelly, J.B.; Kelly, L.M.: Paths and circuits in critical graphs. Amer. J. Math. 76 (1954), 786-792.

[8] Nešetřil, J.: k-chromatische Graphen ohne Zyklen der Länge ≤ 7 (Russisch). Comment. Math. Univ. Carolinae 7 (1966) 373-376.

[9] Erdős, P.; Hajnal, A.: On chromatic number of graphs and finite set-systems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966), 61-99.