Bemerkungen zu einem Kantenfärbungsproblem

Manfred Schäuble

Die vorliegenden Bemerkungen wurden durch die in der vorangehenden Arbeit [1] durchgeführten Untersuchungen über Knotenpunktfärbungen angeregt. Die Behandlung entsprechender Kantenfärbungsprobleme scheint jedoch schwieriger zu sein.

Im folgenden sollen einige leicht zu erhaltende (aber vielleicht doch erwähnenswerte) Resultate aus diesem Problemkreis mitgeteilt werden. Voraussetzungen und Bezeichnungen sind dieselben wie in [1]. Ähnlich wie in [1] definieren wir für jeden Graphen G und jede natürliche Zahl $p \geq 3$ eine Färbungszahl $\xi_p(G)$:

Es sei $\xi_p(G)$ die minimale Anzahl von Farben mittels derer die Kanten von G so gefärbt werden können, daß in keinem in G enthaltenen zu $\langle p \rangle$ isomorphen Graphen alle Kanten mit derselben Farbe gefärbt sind. Die Klasse der schlichten endlichen Graphen G mit $\varsigma_3(G) = 2$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$.

(I) Alle schlichten Graphen G, deren chromatische Zahl $\chi(G)$ nicht größer als 5 ist, gehören zu $\mathfrak{R}$.

Die Knotenpunkte eines jeden derartigen Graphen lassen sich nämlich so in fünf Klassen $K_1, K_2, \ldots, K_5$ (von denen auch gewisse leer bleiben dürfen) einteilen, daß keine zwei Knotenpunkte, die ein und derselben Klasse angehören, durch eine Kante verbunden sind. Färbt man nun alle Kanten, die Knotenpunkte aus irgend zwei Klassen K_i und K_{i+1} (i modulo 5) mit benachbarten Indizes verbinden, mit derselben Farbe - sagen wir blau - und alle übrigen Kanten mit einer weiteren Farbe - sagen wir rot -, so wird bei dieser Färbung in jedem in G enthaltenen zu $\langle 3 \rangle$ isomorphen Graphen (einen solchen bezeichnen wir kurz als <u>Dreikreis</u>) mindestens eine Kante blau und auch mindestens eine Kante rot gefärbt. Es entstehen dabei keine monochrom gefärbten Dreikreise - die Behauptung (I) ist damit bewiesen. Offensichtlich gilt $\xi_3(\langle 6 \rangle) = 3$; indessen lassen sich aber auch ohne große Mühe (wie einer mündlichen Mitteilung von T. GALLAI zufolge, bereits früher von L. PÓSA bemerkt) Graphen G mit $\xi_3(G) = 3$ konstruieren, die keinen $\langle 6 \rangle$ enthalten.

Für Graphen, deren chromatische Zahl nicht größer als vier ist, läßt sich die über (I) hinausgehende Aussage machen:

(II) In jedem Graphen G mit $\chi(G) \leq 4$ können die Kanten derart mit zwei Farben (rot und blau) gefärbt werden, daß in jedem in G enthaltenen Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote Kante auftreten.

Die Richtigkeit der Behauptung (II) ergibt sich sofort, wenn man eine Einteilung der Knotenpunkte eines solchen Graphen G in vier Klassen paarweise nicht-adjazenter Punkte vornimmt (von denen wieder gewisse leer bleiben dürfen) und die beim Beweis von (I) benutzte Färbungsvorschrift (jetzt jedoch mit i modulo 4) anwendet.

Die Kanten des $\langle 5 \rangle$ können nicht mit zwei Farben so gefärbt werden, daß in jedem Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote Kante auftreten.

Aus (I) folgt:

(III) Alle schlichten planaren Graphen gehören der Klasse $\mathfrak{K}$ an.

Aus (II) würde darüber hinaus, wenn die Richtigkeit der Vierfarbenvermutung als bewiesen vorausgesetzt werden dürfte, folgen:

(IV) In jedem schlichten planaren Graphen G lassen sich die Kanten so mit zwei Farben (rot und blau) färben, daß in jedem Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote Kante liegen.

Wir zeigen, daß (IV) unabhängig von der Richtigkeit der Vierfarbenvermutung gilt:

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, die Behauptung (IV) sei falsch! Sei G_0 dann ein schlichter planarer Graph mit minimaler Knotenpunktzahl, dessen Kanten nicht so gefärbt werden können, daß in jedem Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote auftreten. G_o sei ohne Kantenüberschneidungen in der Ebene gezeichnet. Für den Fall, daß G_o nicht selbst schon die Ebene in lauter Dreiecke zerlegt, fügen wir zwischen gewissen Knotenpunkten von G_o derart neue Kanten ein, daß ein schlichter planarer Graph Γ_o entsteht, der dieselben Knotenpunkte wie G_o besitzt und die Ebene vollständig trianguliert. (Man überlegt sich leicht, daß dies, falls G_o mehr als zwei Knotenpunkte besitzt, immer möglich ist). Da Γ_o den Graphen G_o als Teilgraphen enthält, lassen sich auch die Kanten von Γ_o nicht wie in (IV) behauptet färben. Trianguliert schon G_o die Ebene vollständig, so setzen wir $\Gamma_o = G_o$.

Es gilt: Γ_o ist mindestens zweifach kanten-zusammenhängend.

Im folgenden denken wir uns die feste Einbettung von Γ_o in die Ebene, auf die uns der Prozeß des Triangulierens von G_o geführt hat, beibehalten. Wir ordnen den von den Kanten des Graphen Γ_o berandeten Flächenstücken in der Ebene, die sämtlich Dreiecke sind, Knotenpunkte zu und verbinden zwei dieser Knotenpunkte immer dann, wenn die ihnen entsprechenden Flächenstücke längs einer Kante von Γ_o benachbart sind. Der so entstehende zu Γ_o duale Graph Δ_o ist planar, kubisch und enthält keine Brücken.

Nach dem bekannten Petersenschen Faktorisierungssatz für kubische Graphen kann Δ_o in einen quadratischen Faktor Q und in einen linearen Faktor L zerlegt werden. Die Kanten von Q seien blau, die von L rot gefärbt.

Wir färben nun eine Kante von Γ_o blau oder rot je nachdem, ob die ihr in Δ_o entsprechende (sie kreuzende) Kante zu Q oder zu L gehört, und erhalten so eine Färbung der Kanten von Γ_o, bei der jeder Dreikreis von Γ_o, dessen Kanten bei der gegebenen Einbettung von Γ_o in die Ebene ein Elementarflächenstück beranden, zwei blaue und eine rote Kante enthält. Einen Dreikreis, dessen Kanten ein Elementarflächenstück beranden, nennen wir kurz einen elementaren Dreikreis. Da Δ_o sogar auch immer so in einen linearen und einen quadratischen Faktor zerlegt werden kann, daß irgendeine fest gewählte Kante dem rot gefärbten Linearfaktor angehört [1]) und beim

1) Hierzu siehe [2], § 5, Satz 2, Seite 43.

Prozeß des Triangulierens von G_0 elementare Dreikreise elementar bleiben, können wir als Teilergebnis notieren:

> (V) In jedem ohne Kantenüberschneidungen in der Ebene gezeichneten Graphen G lassen sich die Kanten so mit zwei Farben (rot und blau) färben, daß in jedem elementaren Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote auftreten.
> Für eine beliebig ausgewählte Kante kann überdies die Farbe willkürlich vorgegeben werden.

Γ_0 ist gemäß Voraussetzung nicht so färbbar wie in (IV) angegeben und enthält deshalb wenigstens einen nicht-elementaren Dreikreis. Unter den nichtelementaren Dreikreisen wählen wir einen solchen D aus, in dessen Innerem (bei der betrachteten Einbettung von Γ_0 in die Ebene) keine von D verschiedenen nicht-elementaren Dreikreise liegen, auch nicht solche, die Kanten von D enthalten. Es ist klar, daß D immer existiert. Wir können nun weiter schließen:

1) Der aus Γ_0 durch Entfernen aller ganz im Inneren von D gelegenen Knotenpunkte und Kanten von Γ_0 entstehende Graph Γ_0^* ist planar und schlicht. Γ_0^* enthält weniger Knotenpunkte als G_0 und ist deshalb im Sinne der Behauptung (IV) zulässig färbbar. Wir denken uns eine Färbung der Kanten von Γ_0^* ausgeführt, bei der jeder Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote Kante enthält. Die Kante k von D sei dabei rot gefärbt worden.

2) D und alle im Inneren von D gelegenen Knotenpunkte und Kanten von Γ_0 bilden nach Entfernen der im Äußeren von D gelegenen Knotenpunkte und Kanten von Γ_0 für sich betrachtet einen Graphen Γ_0^{**}, der schlicht, planar und brückenlos ist. Jeder Dreikreis von Γ_0^{**} ist elementar. Die Kanten von Γ_0^{**} können deshalb nach (V) im Sinne der Behauptung (IV) zulässig so gefärbt werden, daß dabei die Kante k die Farbe rot erhält.

Die Vereinigung der wie unter 1) und 2) gefärbten Graphen Γ_0^* und Γ_0^{**} liefert dann schließlich eine Färbung für Γ_0, bei der in jedem Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote Kante auftreten. Wegen $G_0 \subset \Gamma_0$ ist dann aber auch, im Widerspruch zu unserer ursprünglichen Annahme, G_0 im Sinne der Behauptung (IV) zulässig gefärbt, d.h. G_0 existiert nicht. (IV) ist damit bewiesen.

Aus unserem Vorgehen folgt, da sich die Gültigkeit des Satzes von Petersen nicht auf planare Graphen beschränkt, überdies:

(VI) In jedem auf einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ ohne Überschneidungen der Kanten gezeichneten Graphen G lassen sich die Kanten derart mit zwei Farben (rot und blau) färben, daß in jedem Dreikreis, der für sich allein betrachtet, bei der gegebenen Einbettung auf $\mathfrak{F}$ wenigstens ein Elementarflächenstück berandet, zwei blaue Kanten und eine rote Kante auftreten.

Um auf den Zusammenhang mit den in [1] behandelten Problemen hinzuweisen, sei bemerkt, daß die Kanten eines Graphen G mit $\chi_3(G) = 2$ immer so gefärbt werden können, daß in jedem Dreikreis zwei blaue Kanten und eine rote auftreten:

Man denke sich dazu die Knotenpunkte von G 3-zulässig gefärbt und färbe sodann Kanten, die Knotenpunkte verschiedener Farbe verbinden, blau und solche, die Knotenpunkte gleicher Farbe verbinden, rot.

Da $\chi(G) \leq 4$ offensichtlich $\chi_3(G) \leq 2$ nach sich zieht, könnte folgende Aussage auch aus der Richtigkeit der Vierfarbenvermutung gefolgert werden:

(VII) In jedem schlichten planaren Graphen G können die Knotenpunkte so mit zwei Farben gefärbt werden, daß in keinem Dreikreis alle drei Knotenpunkte die gleiche Farbe erhalten.

Ein Beweis für (VII) kann unter Benutzung von (IV) erbracht werden:

Als Knotenpunktfarben wollen wir schwarz und weiß benutzen. Sei G schlicht und planar. Wir fügen in G wie beim Beweis von (IV) neue Kanten ein, so daß ein schlichter planarer Graph Γ entsteht, der die Ebene vollständig trianguliert. (Eventuell ist $\Gamma = G$.) Die Kanten von Γ werden (was nach (IV) möglich ist) so mit den Farben rot und blau gefärbt, daß in jedem Dreikreis von Γ (und damit auch in jedem Dreikreis von G) zwei blaue Kanten und eine rote Kante auftreten.

(1) Bei jeder solchen Färbung von Γ enthält ein beliebiger Kreis in Γ stets eine gerade Anzahl blauer Kanten; das ist mittels In-

duktion nach der Anzahl der von einem Kreis umschlossenen Elementardreiecke leicht nachzuweisen.

Wir wählen nun ein Gerüst H von Γ aus. Ein beliebiger Knotenpunkt x von Γ wird schwarz gefärbt. Den Kanten von H ordnen wir für den Augenblick Längen zu, und zwar den roten Kanten die Länge zwei und den blauen Kanten die Länge eins. Alle Knotenpunkte, die in H von x einen geraden Abstand haben, werden sodann schwarz gefärbt. Die übrigen Knotenpunkte erhalten die Farbe weiß. Es gilt offensichtlich:

(2) Zwei voneinander verschiedene Knotenpunkte u, v haben genau dann die gleiche Farbe, wenn der sie auf H verbindende Weg eine gerade Anzahl blauer Kanten enthält.

Der beliebige Dreikreis D enthalte die blaue Kante (u,v). Gehört (u,v) zu H, so sind schon wegen (2) nicht alle Knotenpunkte von D gleichgefärbt.
Im gegenteiligen Falle sind auf Grund von (1) u und v auf H durch einen Weg mit einer ungeraden Anzahl blauer Kanten verbunden und deshalb - wieder wegen (2) - verschieden gefärbt.
Weil $G \subset T$, ist damit (VII) bewiesen.

Bemerkung 1: Natürlich hätten für den Beweis auch die Feststellung, daß unser Knotenpunktfärbungsverfahren lokal eindeutig ist, und ein Hinweis auf das Monodromieprinzip genügt. Der Beweis kann auch leicht durch Übergang zum dualen Graphen von Γ und spezielle Zerlegung dieses Graphen in einen quadratischen und einen linearen Faktor geführt werden.

Bemerkung 2: Es können nichtplanare Graphen G angegeben werden, deren Kanten im Sinne der Behauptung (IV) zulässig färbbar sind, für die jedoch $\chi_3(G) = 3$ ist.

Literatur

[1] Sachs, H.; Schäuble, M.: Konstruktion von Graphen mit gewissen Färbungseigenschaften, vorhergehende Arbeit dieses Buches.

[2] Ringel, G.: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.