Verallgemeinerte Hamiltonsche Linien

Milan Sekanina

Ich möchte hier über einige Resultate, die von Anordnungen der Knotenpunkte in Graphen handeln, berichten. Unter einem Graphen verstehe ich einen ungerichteten Graphen mit einfachen Kanten ohne Schlingen. Wenn G ein Graph ist und A eine Untermenge der Menge der Knotenpunkte von G (die Menge der Knotenpunkte von G wird auch mit G bezeichnet), dann bedeutet $G - A$ denjenigen Graphen, der aus G entsteht, wenn man die Knotenpunkte von A und die mit diesen inzidenten Kanten entfernt. Der Abstand $\mu(a,b)$ zweier Knotenpunkte a, b aus G, ist, wie üblich, die Anzahl der Kanten eines kürzesten Weges, welcher a und b verbindet. Die klassischen Aufgaben über Hamiltonsche Linien lassen sich so formulieren:

> Es soll eine Anordnung der Menge der Knotenpunkte eines endlichen oder abzählbaren zusammenhängenden Graphen in eine Folge so angegeben werden, daß die in dieser Folge benachbarten Knotenpunkte den Abstand 1 haben.

Diese Betrachtungen können in folgender Weise verallgemeinert werden:

Es seien G ein endlicher oder abzählbarer zusammenhängender Graph und k eine natürliche Zahl. Wir sagen, daß G die Eigenschaft A_k oder $\bar{A}_k$ besitzt, wenn man die Knotenpunkte von G in einer Folge $\{a_i\}_i$ so anordnen kann, daß $\mu(a_{i+1}, a_i) \leq k$ bzw. $\mu(a_{i+1},a_i) = k$ ist. Die Eigenschaft A_k wurde in [1], [2], [4], [5] studiert.

J. Rosický hat sich in [3] mit $\bar{A}_k$ beschäftigt.

Es sei G ein endlicher zusammenhängender Graph mit n Knotenpunkten, welcher die Eigenschaften $\bar{A}_k$ besitzt. Es wurde gezeigt, daß $n \geq 2k+1$ ist und daß für jedes solches n ein Graph mit $\bar{A}_k$ existiert. Für $n = 2k+1$ und $k > 2$ wird damit das Polygon mit $2k+1$

Knotenpunkten charakterisiert. Für $k = 2$ gibt es noch die folgenden zwei minimalen Graphen:

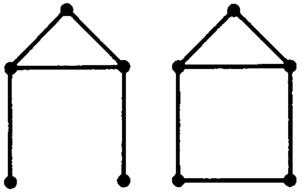

Abb. 1

Für Bäume gilt folgender Satz:

Satz 1: Es sei G ein Baum mit der Eigenschaft $\bar{A}_k$, wobei k eine ungerade Zahl ist. Dann gilt $n \geq \frac{7k-5}{2}$. Diese Schranke ist für alle n scharf.
Für gerade k gibt es keine Bäume mit der Eigenschaft $\bar{A}_k$.

Man kennt bisher nicht alle minimalen Graphen. Ein minimaler Graph ist der folgende Graph:

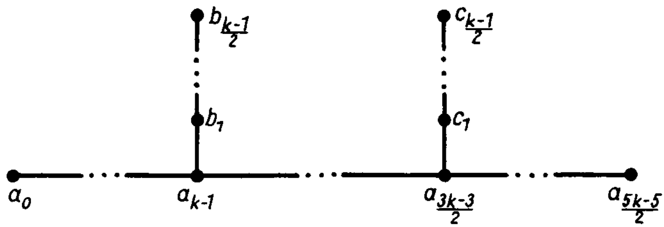

Abb. 2

Wir gehen nun zum unendlichen Fall über. Wir werden uns mit der Eigenschaft A_k und mit den Anordnungen vom Typ der natürlichen Zahlen beschäftigen.

In [5] 4.6 wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 2: Es sei G ein zusammenhängender abzählbarer Graph. Es sei k eine natürliche Zahl größer als 3. Der Graph G besitzt die Eigenschaft A_k dann und nur dann, wenn folgende Bedingung B_k erfüllt ist:

B_k: In jeder Überdeckung $A \cup B \cup C$ von G, wobei A, B unendlich sind und C endlich ist, gilt immer $\mu(A,B) \leq k$.

Man kann zeigen, daß a_1 in der gesuchten Folge von Satz 2 willkürlich gewählt werden kann. Für $k = 1, 2, 3$ gilt Satz 2 nicht. Für $k = 2$ ist eine mit A_2 äquivalente Bedingung für Bäume bekannt ([2]). Man kann daran erkennen, daß a_1 in diesem Fall nicht beliebig gewählt werden darf.

Satz 3: Es sei G ein abzählbarer zusammenhängender Graph mit höchstens einem Knotenpunkt von unendlichem Grad. Dann ist A_3 äquivalent zu B_3.

B e w e i s : Die Notwendigkeit von B_3 ist klar.
Es sei B_3 erfüllt. Wir ordnen G in eine ganz beliebige Folge $a_1, \dots, a_n, \dots$ an. H sei ein Untergraph erster Art von G ([5], Fußnote Seite 276); d.h. H ist ein endlicher zusammenhängender Untergraph von G mit folgenden Eigenschaften: Jeder Komponente K von $G - H$ kann man einen Knotenpunkt $k(K) \in H$ so zuordnen, daß $\mu(k(K), K) = 1$ ist und, wenn K endlich ist, gibt es unendlich viele K_i mit $k(K) = k(K_i)$. Die Knotenpunkte $k(K)$ heißen verbindende Knotenpunkte (bzgl. H und bzgl. der gegebenen Zuordnung $k(\ \ )$).
Weiterhin setzen wir voraus: Es seien $a_1, \dots, a_n \in H$, $a_{n+1} \notin H$, und es sei $b_1, \dots, b_k$ eine Anordnung von H mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mu(b_i, b_{i+1}) \leq 3$;
2. Es existiert eine Komponente K in $G - H$ so, daß $\mu(b_k, k(K)) \leq 1$.

α) Alle Knotenpunkte mögen einen endlichen Grad haben. Dann sind alle Komponenten von $G - H$ unendlich. L bezeichne diejenige Komponente, die a_{n+1} enthält. Wie in [5] folgt aus B_3 :
Es existiert eine endliche Folge $K = K_1, \dots, K_t = L$ so, daß für jedes i gilt: Es gibt verschiedene Elemente $c_1, \dots, c_j, \dots$ in K_i und $d_1, \dots, d_j, \dots$ in K_{i+1} mit $\mu(c_j, d_j) \leq 3$.

α_1) Es sei $K = L$. Ferner sei H_1 ein Untergraph erster Art von L, welcher a_{n+1} und einen Knotenpunkt g enthält mit

$\mu(g,k(L)) = 1$. Nach Lemma 3 [4] kann H_1 in folgender Folge angeordnet werden:
$H_1 = \{f_1,\ldots, f_m\}$, $\mu(f_i,f_{i+1}) \leq 3$, $f_1 = g$ und f_m hat von einem verbindenden Knotenpunkt aus H_1 höchstens den Abstand 1.

Den Beweis setzen wir dann mittels Induktion fort.

α_2) Es sei $K \neq L$. Es sei g wie in α_1) definiert. c_1 bzw. d_1 bedeute einen Knotenpunkt in K_1 bzw. K_2, für welchen $\mu(c^1,d^1) \leq 3$, $c^1 = g$ ist.

Es sei H_1 ein Untergraph erster Art von K_1; g, $c^1 \in H_1$. Wir ordnen H_1 an in der Folge $g = f_1^1,\ldots, f_m^1 = c^1$, $\mu(f_i^1,f_{i+1}^1) \leq 3$.

Es sei $t \neq 2$. c^2, d^2 seien Knotenpunkte von K_2 analog c^1, d^1 von K_1, und $c^2 \neq d^1$. Es sei H_2 ein Untergraph erster Art von K_2; d^1, $c^2 \in H_2$ und $\mu(H_2,H) = 1$. Wir ordnen H_2 an in der Folge $d^1 = f_1^2,\ldots, f_m^2 = c^2$, $\mu(f_i^2, f_{i+1}^2) \leq 3$. Wir setzen das Verfahren bis zum Schritt t fort. Dann ist d^{t-1} definiert. Es sei H_t ein Untergraph erster Art von K_t, welcher d^{t-1}, a_{n+1} enthält und für den $\mu(H_t,H) = 1$ ist.

Wir ordnen H_t an in der Folge $d^{t-1} = f_1^t,\ldots, f_{m_t}^t$ mit $\mu(f_i^t, f_{i+1}^t) \leq 3$, und $f_{m_t}^t$ besitzt von einem verbindenden Knotenpunkt aus H_t höchstens den Abstand 1.

Dann ist $H \cup H_1 \cup \ldots \cup H_t$ von der ersten Art, $k(\ )$ ist mittels $k(\ )$ für H und einzelne H_i definiert. Dieser Untergraph ist in der Folge $b_1,\ldots, b_k, f_1^1,\ldots, f_{m_1}^1, f_1^2,\ldots \ \ldots f_1^t,\ldots, f_{m_t}^t$ angeordnet, und diese Folge erfüllt die Induktionsvoraussetzungen für p, $p > n$.

β) Es sei a ein Knotenpunkt, dessen Grad unendlich ist. Wir können voraussetzen, daß $a \in H$ ist. Man kann zeigen, daß $k(K) = a$ für alle Komponenten K gewählt werden kann. Es sei nämlich K eine solche Komponente aus $G - H$, für welche $\mu(K,a) > 1$ ist. Wenn K endlich wäre, dann würde $k(K)$ einen unendlichen Grad besitzen, und es wäre $a = k(K)$. Also ist K unendlich. Es sei $C = \{x \mid x \in H \cup K, \mu(x,H) \le 2\}$. Dann gilt: C ist endlich, und $A = K - C$ und $B = G - A \cup C$ sind unendlich. Es ist klar, daß $\mu(A,B) \ge 4$ ist, was B_3 widerspricht. So können wir voraussetzen, daß $k(K) = a$ gilt für alle K. Wir nehmen nun an, daß $a_{n+1} \in K$ ist. Dann bedeute H_1 wieder einen Graphen erster Art von K, welcher a_{n+1} enthält und für den $\mu(H_1,H) = 1$ gilt. Wir ordnen H_1 an in einer Folge $f_1,\dots, f_m$ mit $\mu(f_1,a) \le 2$, $\mu(f_m,a) = 1$ und $\mu(f_i,f_{i+1}) \le 3$. Der Graph $H \cup H_1$ und die Folge $b_1,\dots, b_k$, $f_1,\dots, f_m$ erfüllen die Induktionsvoraussetzungen für gewisses p, $p > n$.

Es sei K ein Baum, $a \in K$. Wir sagen, K ist in a <u>spezial</u>, wenn ein Endknotenpunkt b in K, $b \neq a$ existiert, für welchen $\mu(b,a) \le 2$ ist.

<u>Satz 4:</u> Es sei G ein abzählbarer Baum, welcher in einer Folge $\{a_i\}_i$ mit $\mu(a_i, a_{i+1}) \le 3$ angeordnet ist. Es seien $a \in G$ und K eine Komponente in $G - a$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\{a\} \cup K$ ist nicht spezial in a.
2. $a_1 \notin K$. Wenn $a = a_g$, dann gilt für a_{g-1} (falls definiert): $a_{g-1} \notin K$, $a_{g+1} \notin K$. Dann existieren Indizes j_1 und j_2 so, daß $\{a_{j_1}, a_{j_1+1},\dots, a_{j_2}\} = K$ und $\mu(a_{j_1},a) \le 2$, $\mu(a_{j_2},a) \le 2$.

B e w e i s : Wir führen folgende Bezeichnungen ein:
Es sei b ein Knotenpunkt von K mit $\mu(b,a) = 1$; $K_1,\dots, K_n$ seien die Komponenten von $K - \{b\}$; $U = G - K$, $\mathfrak{U} = \{U, K_1,\dots, K_n, \{b\}\}$, $\mathfrak{L} = K_1,\dots, K_n, \{b\}\}$. $\mathfrak{U}$ ist eine Zerlegung von G derart, daß jedes a_i in genau einem Element X von $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Dieses X wird mit U_i bezeichnet. Es sei $\{U_{i_j}\}_j$ eine Folge, welche aus $\{U_i\}_i$ ausgewählt wird und aus allen solchen U_i besteht, für welche $U_i \neq U_{i-1}$ ist. So ist $U_{i_1} = U$, und $\{U_{i_j}\}_j$ ist endlich. Diese Folge wird mit σ bezeichnet. Es

sei für einen Index i $a_i \in K$ und gleichzeitig $a_{i-1} \notin K$ oder $a_{i+1} \notin K$. Dann gilt $\mu(a_i, b) \leq 1$.

Weiter sei K_j gegeben, $a_{i'} \in K_j$, $a_{i'-1} \notin K_j$. Dann gilt

$$\{a_{i'}, a_{i'-1}\} \cap \{x \mid x \in K, \ \mu(x,b) \leq 1\} \neq \emptyset. \qquad (*)$$

Ebenso, wenn $a_{i''} \in K_j$, $a_{i''+1} \notin K_j$,

$$\{a_{i''}, a_{i''+1}\} \cap \{x \mid x \in K, \mu(x,b) \leq 1\} \neq \emptyset. \qquad (**)$$

Wenn $U_{i_j} \in \mathfrak{L}$ ist, so gilt

$$\{a_{i_j-1}, a_{i_j}\} \cap \{x \mid x \in K, \mu(x,b) \leq 1\} \neq \emptyset.$$

Ein Knotenpunkt aus diesem Durchschnitt wird mit $p(j)$ bezeichnet.

Wenn $U_{i_j} = U$, $U_{i_j-1} \in \mathfrak{L}$ gilt, dann ist $\mu(a_{i_j-1}, b) \leq 1$, und wir setzen $p(j) = a_{i_j-1}$. So gilt immer

$$p(j) \in \{a_{i_j-1}, a_{i_j}\} \qquad (***)$$

und $p(j)$ ist nur für $j = 1$ nicht definiert.

Wenn $p(j)$, $p(j+1)$ definiert sind und $p(j) = p(j+1)$ ist, dann folgt aus (***): $p(j) = a_{i_j}$. Man kann weiter zeigen:

(A) Wenn $U_{i_j} \neq \{b\}$ ist, dann gibt es ein $v \neq j$ so, daß U_{i_v} ein Element von σ ist.

Nämlich $a_{i_j} \in U_{i_j}$, $a_{i_j} \notin U_{i_j-1}$, $a_{i_j+1} \notin U_{i_j}$ ($a_{i_j} = p(j+1)$, d.h. $a_{i_j} \in \{a_{i_{j+1}}-1, a_{i_{j+1}}\}$, woraus $i_{j+1} - 1 = i_j$ folgt und $i_j+1 = i_{j+1}$, was bedeutet: $a_{i_j+1} \in U_{i_{j+1}}$). Weil $K \cup \{a\}$ in a nicht spezial ist, ist U_{i_j} keine Menge, die nur einen Knotenpunkt enthält; dann muß U_i mindestens noch einmal in σ vorkommen.
Aus (***) folgt weiter: $j < t$, $p(j) = p(t) \Rightarrow t = j+1$. Wenn gleichzeitig für $j \neq t$, $U_{i_j} = U_{i_t}$ und $p(j) = p(j+1)$
$p(t) = p(t+1)$ wäre, dann würde folgen: $a_{i_j} \neq a_{i_t}$, $\mu(a_{i_t}, b) \leq 1$,

$\mu(a_{i_j},b) \leq 1$, was unmöglich ist, weil nur ein solcher Knotenpunkt in U_{i_t} existiert. Somit gilt

(B) $j \neq t,\ \ p(j) = p(j+1),\ \ p(t) = p(t+1) \Rightarrow U_{i_t} \neq U_{i_j}$.

Wir können alles oben Gesagte folgendermaßen zusammenfassen:

Die Länge von σ sei m. Die Anzahl der Indizes j, für welche $U_{i_j} \in \mathfrak{L}$ gilt, sei d, und $t = m - d$. Nach (A) und (B) ist $d > n + s$, wobei s die Anzahl derjenigen Indizes j ist, für welche $p(j) = p(j+1)$ gilt. Also ist $p(j)$ mindestens für $n + s + t - 1$ Indizes definiert. Aber die Anzahl der Indizes, für welche $p(j)$ definiert ist, ist genau $m-1$. Es gibt $m - 1 - s$ verschiedene $p(j)$, was größer oder gleich $n + t - 1$ ist. Aber $\mathrm{card}\ \{\ x \mid x \in K,\ \mu(x,b) \leq 1\ \} = n+1$. Weil $t \geq 2$ ist, bekommen wir $t = 2$, also $U_{i_2},\ldots, U_{i_{m-1}} \in \mathfrak{L}$. Die Behauptung bzgl. a_{j_1} und a_{j_2} folgt sofort aus (*) und (**).

Nun können wir die Bäume mit der Eigenschaft A_3 beschreiben.

Satz 5: Es sei G ein Baum; G' bezeichne die Menge aller Knotenpunkte, welche einen unendlichen Grad haben. Es sei $\mathrm{card}\ (G') \geq 2$. G hat die Eigenschaft A_3 dann und nur dann, wenn gilt:

1. Der Untergraph G' ist zusammenhängend.
2. Die Komponenten von $G - G'$ sind endlich.
3. Wenn a einen endlichen Grad in G' hat, dann gibt es unendlich viele Komponenten K in $G - G'$, für welche
   a) $\mu(K,a) = 1$,
   b) $K \cup \{a\}$ spezial in a ist.

B e w e i s : Notwendigkeit: Ad 1. Wir nehmen an, daß 1. nicht gilt. Es gibt dann zwei Knotenpunkte a,b so, daß auf dem kürzesten Wege $a = a_1, a_2,\ldots, a_n = b$, welcher a und b in G verbindet, $a_2,\ldots, a_{n-1}$ keine Elemente von G' sind und $n > 2$ ist. Es seien A_1 und B_1 die Komponenten von $G' - \{a_2,\ldots, a_{n-1}\}$, welche a bzw. b enthalten (so daß $a \in A_1$, $b \in B_1$). A_1, B_1 sind unendlich, $C_1 = G - (A_1 \cup B_1)$ ist endlich. Es sei $A = A_1 - \{a\}$, $B = B_1 - \{b\}$, $C = C_1 \cup \{a,b\}$. Es ist klar, daß $\mu(a,b) \geq 4$ ist, also B_3 für G nicht gilt. B_3 ist aber eine notwendige Bedingung für A_3.

Ad 2. Es sei K eine unendliche Komponente von $G - G'$. Es sei a der Knotenpunkt mit $\mu(a,K) = 1$. Weil alle Knotenpunkte von K einen endlichen Grad haben, ist $C = \{x \mid x \in K, \mu(x,a) \leq 3\}$ endlich. Wir setzen $A = K - C$, $B = G - K$. Wieder ist B_3 nicht erfüllt.

Ad 3. Es sei 3. nicht gültig für einen Knotenpunkt a. Wir setzen voraus, daß G in der Folge $\{a_i\}_i$ angeordnet ist und $\mu(a_i, a_{i+1}) \leq 3$ gilt. Es sei N eine so große natürliche Zahl, daß alle Knotenpunkte von G' mit der maximalen Entfernung 1 von a in $\{a_1, \ldots, a_N\}$ enthalten sind und dasselbe gilt für alle Knotenpunkte derjenigen Komponenten K, für welche a) und b) gelten. Es sei K_1 eine Komponente mit der Eigenschaft a), für welche $\{a_1, \ldots, a_{N+1}\} \cap K_1 = \emptyset$ ist. Nach Satz 4 existieren Indizes i und j so, daß $\{a_1, \ldots, a_j\} = K_1$ ist. Weil $\mathrm{card}(G') \geq 2$ ist, können wir sicher K_1 so wählen, daß a_{i-1} nicht in irgendeiner Komponente mit der Eigenschaft a) liegt. Aus unseren Voraussetzungen über N folgt, daß $\mu(a_i, a) = 1$ ist und, weil G ein Baum ist und K keine Komponente ist, die nur einen Knotenpunkt enthält, gilt: $\mu(a_j, a) = 2$. Aber das bedeutet, daß a_{j+1} in einer Komponente K_2 mit der Eigenschaft a) liegt. So beweist man durch vollständige Induktion, daß für $n > i$ der Knotenpunkt a_i in einer Komponente liegt, für welche a) richtig ist. Aber das ist unmöglich, da $\mathrm{card}(G') \geq 2$ ist.

Nun beweisen wir, daß G mit den Eigenschaften 1, 2, 3 in einer gewünschten Folge angeordnet werden kann. Wir ordnen G in einer ganz beliebigen Folge $b_1, b_2, \ldots$ an. Es sei schon die Folge $a_1, \ldots, a_k$ definiert, für welche folgendes gelte:

α) Es existiert ein $a^* \in G'$ mit $\mu(a^*, a_k) \leq 1$.

β) $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \{a_1, \ldots, a_k\}$.

γ) Es sei K eine Komponente von $G - G'$, welche nicht in $\{a_1, \ldots, a_k\}$ enthalten ist. Es sei $c' \in G'$ mit $\mu(c', K) = 1$.

Wenn $\{a_1,\dots, a_k\} \cap K \neq \emptyset$ ist, dann ist $K \cup \{c'\}$ spezial in c', und dann ist $\{a_1,\dots, a_k\} \cap K = \{x\}$, wo $\mu(c',x) = 1$.

Es sei t der erste Index, für den $b_t \notin \{a_1,\dots, a_k\}$. Wir bezeichnen mit c denjenigen Knotenpunkt von G', für welchen $c = b_t$ gilt oder für den $\mu(c,k) = 1$ gilt, wobei K diejenige Komponente von $G - G'$ bezeichnet, die b_t enthält. Es sei $a^*, c_1,\dots, c_u = c$ der kürzeste Weg, der a^* mit c verbindet. Wenn c_1 in G' unendlichen Grad hat, dann sei a_{k+1} gleich demjenigen Knotenpunkt von G', der zu c_1 benachbart ist und nicht zu $\{a_1,\dots, a_k\}$ gehört. Wenn c_1 in G' endlichen Grad hat, dann sei a_{k+1} ein zu c_1 benachbarter Knotenpunkt, der nicht in $\{a_1,\dots, a_k\}$ enthalten ist und der in einer Komponente K von $G - G'$ liegt, die die Eigenschaft hat, daß $K \cup \{c_1\}$ in c_1 spezial ist. $a_{k+1},\dots, a_{k+u}$ seien schon in dieser Weise definiert. Wenn $c = a^*$ ist, dann ist $a_{k+u} = a_k$. Folglich $\mu(a_{k+u},c) \leq 1$. Wenn $c = b_t$ gilt, setzen wir $a_{k+u+1} = b_t$. Es sei $c \neq b_t$. Dann gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

I) $K \cup \{c\}$ ist spezial in c. Bezeichnet e denjenigen Knotenpunkt von K, für den $\mu(e,c) = 1$ ist, dann gilt $e \in \{a_1,\dots$ $\dots, a_{k+u}\}$. Dann kann man mittels [4], Lemma 3, leicht zeigen: Die Menge $K - \{e\}$ kann so in einer Folge $f_1,\dots, f_v$ angeordnet werden, daß gilt:

1) $\mu(f_i,f_{i+1}) \leq 3$. (Der Abstand wird bzgl. G betrachtet).
2) $\mu(f_1,c) = \mu(f_v,c) = 2$.

II) Wenn I) nicht erfüllt ist, dann wird K in einer entsprechenden Folge angeordnet, für welche $\mu(f_1,c) \leq 2$, $\mu(f_v,c) \leq 2$ gilt. Wir setzen $a_{k+u+1} = f_1,\dots, a_{k+u+v} = f_v$. $a_{k+u+v+1}$ wird wie a_{k+1} für c_1 definiert. So bekommt man die Folge $a_1,\dots, a_{k+u+1}$ oder $a_1,\dots, a_{k+u+v+1}$, welche b_{n+1} enthält und die die Eigenschaften, welche wir von der Folge $a_1,\dots, a_k$ verlangten, besitzt.

Weiter gilt folgender Satz ([6]):

Satz 6: Wenn eine Anordnung der Knotenpunkte eines abzählbaren zusammenhängenden Graphen in eine Folge $\{a_i\}_i$ existiert mit $\mu(a_i, a_{i+1}) \leq 3$ für alle i, dann kann man a_1 beliebig wählen.

Literatur

[1] Neuman, F.: On a certain ordering of the vertices of a tree, Čas. pro pěst.mat., 89 (1964), 323-339.

[2] Neuman, F.: On ordering of infinite trees, Čas.pro pěst.mat., 91 (1966), 170-177.

[3] Rosický, J.: On existence of the graphs with a given ordering of vertices (wird in Archivum mathematicum erscheinen).

[4] Sekanina, M.: On an ordering of the set of vertices of a connected graph, Publ.Fac.Univ.Brno, No. 412, 137-142 (1960).

[5] Sekanina, M.: On an ordering of the vertices of a graph, Čas.pro pěst.matematiky, 88 (1963) ~~XXX~~ 265-282.

[6] Sekanina, M.: On an ordering of a graph (in Vorbereitung).