

Über die Zerlegung des vollständigen Graphen in paare planare Graphen

Hansjoachim Walther

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten. Ein Graph G heißt planar, wenn sich G in einer Ebene derart zeichnen läßt, daß sich keine zwei Kanten überschneiden. Ein Graph G heißt paar, wenn sich die Knotenpunkte von G derart in zwei Klassen einteilen lassen, daß keine zwei Knotenpunkte derselben Klasse durch eine Kante verbunden sind. Eine Kante, die vom Knotenpunkt x zum Knotenpunkt y gerichtet ist, bezeichnen wir mit (x,y) . Eine ungerichtete Kante, die x mit y verbindet, bezeichnen wir mit $[x,y] = [y,x]$. Ein Graph heißt vollständig, wenn je zwei seiner Knotenpunkte durch eine ungerichtete Kante verbunden sind. Den vollständigen Graphen mit n Knotenpunkten bezeichnen wir mit K_n . Wir nennen einen Graphen total gerichtet, wenn es zwischen je zwei Knotenpunkten x und y die beiden gerichteten Kanten (x,y) und (y,x) gibt. Ein offener Kantenzug, der jeden Knotenpunkt eines Graphen G genau einmal enthält, heißt Hamiltonlinie von G .

Auf der Tagung über Graphentheorie in Tihany (Ungarn) im September 1966 behandelten F.HARARY und L.BEINEKE das Problem der Zerlegung des vollständigen Graphen K_n in planare Graphen. Die minimale Anzahl planarer Graphen bei dieser Zerlegung nannten sie die Dicke des vollständigen Graphen K_n .

In dieser Arbeit wollen wir das Problem der Zerlegung des K_n in eine minimale Anzahl paarer planarer Graphen behandeln. Die minimale Anzahl nennen wir die paare Dicke von K_n und bezeichnen sie mit $p(n)$.

Satz 1: Für die paare Dicke des vollständigen Graphen K_n gilt

$$p(n) \geq \left[\frac{1}{4} (n+5) \right]. \quad (1.1)$$

B e w e i s : Für $n = 2$ ist der Satz offenbar richtig, denn der K_2 besteht aus nur einer Kante. Wir können im Weiteren $n > 2$ voraussetzen.

Es bezeichne e die Knotenpunktanzahl, k die Kantenanzahl, f die Anzahl der Elementarflächen und f_i die Anzahl der elementaren i -Ecke eines paaren planaren Graphen G . Es gilt die Eulersche Formel

$$e + f = k + 2 . \quad (1.2)$$

Ferner gilt

$$\sum_{(i)} f_i = f .$$

Da G weder Schlingen noch Mehrfachkanten besitzt, gilt

$$f_1 = f_2 = 0 .$$

Da G paar ist, gilt

$$f_i = 0 \text{ für ungerades } i .$$

Ferner gilt

$$2k = \sum_{(i)} i \cdot f_i = 4f_4 + 6f_6 + \dots = 4f + 2f_6 + \dots \geq 4f \quad (1.3)$$

Mit (1.2) erhält man

$$\begin{aligned} 2k + 4 &= 2e + 2f \leq 2e + k , \\ k &\leq 2e - 4 . \end{aligned}$$

Ein planarer paarer Graph mit höchstens n Knotenpunkten besitzt also höchstens $2n - 4$ Kanten. Da der K_n genau $\binom{n}{2}$ Kanten besitzt, erhalten wir

$$p(n) \geq \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} = \frac{1}{4}(n+1) + \frac{1}{2(n-2)} > \frac{1}{4}(n+1) .$$

Daraus ergibt sich aber unmittelbar die Behauptung.

B e m e r k u n g : Es gibt Graphen K_n , für die die untere Schranke $\lceil \frac{1}{4}(n+5) \rceil$ nicht angenommen wird, denn es gelten die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} p(2n) &\geq p(n) + 1 \quad \text{für gerades } n , \\ p(2n-1) &\geq p(n) + 1 \quad \text{für ungerades } n . \end{aligned}$$

Der Beweis dieser Ungleichungen ist unmittelbar klar, wenn man bedenkt, daß nach Entfernen der Kanten eines paaren Graphen aus einem vollständigen Graphen mit $2n$ (bzw. $2n-1$) Knotenpunkten mindestens noch ein vollständiger Graph mit n Knotenpunkten übrigbleibt. Berücksichtigt man, daß $p(3) = 2$ ist, erhält man

$$p(5) \geq 3, \quad p(6) \geq 3, \quad p(9) \geq 4, \quad p(10) \geq 4.$$

Für alle anderen n ist die untere Schranke von Satz 1 mindestens so groß, wie die durch obige Ungleichungen gegebene. Man überzeugt sich unschwer davon, daß in den oben genannten vier Fällen die untere Schranke der wahre Wert von $p(n)$ ist.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 2 bringen wir zunächst einen Hilfssatz.

Hilfssatz: Es gilt $p(24) = 7$.

B e w e i s : Wegen Satz 1 haben wir nur noch zu zeigen, daß sich der K_{24} in 7 paare planare Graphen zerlegen läßt. Wir werden das Verfahren der Zerlegung in diesem speziellen Fall ausführlich behandeln, da die hier angewandte Methode zum Beweis von $p(8k) = 2k + 1$ verwandt werden kann.

Bekanntlich kann man einen total gerichteten Graphen mit $2k$ Knotenpunkten in $2k$ offene gerichtete Hamiltonlinien derart zerlegen, daß jeder Knotenpunkt genau einmal Anfangs- und genau einmal Endpunkt einer der $2k$ Hamiltonlinien ist. Abb. 1 zeigt die Zerlegung im Falle von 6 Knotenpunkten. Abb. 1a zeigt die Numerierung der Plätze, die wir für später beibehalten wollen. Die Zerlegung $Z/x/1$ von Abb. 1b sieht also z.B. den Knotenpunkt x_4 auf Platz 2 und die Zerlegung $Z/x/6$ von Abb. 1g sieht z.B. den Knotenpunkt x_1 auf Platz 5. Aus der Konstruktion geht unmittelbar hervor: Befindet sich in der Zerlegung $Z/x/i$ der Knotenpunkt x_j auf Platz l , dann befindet sich x_j in der Zerlegung $Z/x/i+m$ auf Platz $l + m$, wobei modulo 6 (i.A. modulo $2k$) gerechnet wird.

Wir schreiben nun die Zerlegung von Abb. 1 in einer etwas anderen Weise, wobei wir die "x" weggelassen haben.

```

1 2 3 4 5 6 - Z/././1
3 1 5 2 6 4 - Z/././2
5 3 6 1 4 2 - Z/././3
6 5 4 3 2 1 - Z/././4
4 6 2 5 1 3 - Z/././5
2 4 1 6 3 5 - Z/././6

```

Nun teilen wir die 24 Knotenpunkte des K_{24} in vier Klassen A, B, C, D ein. Die Knotenpunkte bezeichnen wir mit a_1, a_2, \dots, a_6 ; b_1, b_2, \dots, b_6 ; c_1, c_2, \dots, c_6 ; d_1, d_2, \dots, d_6 .

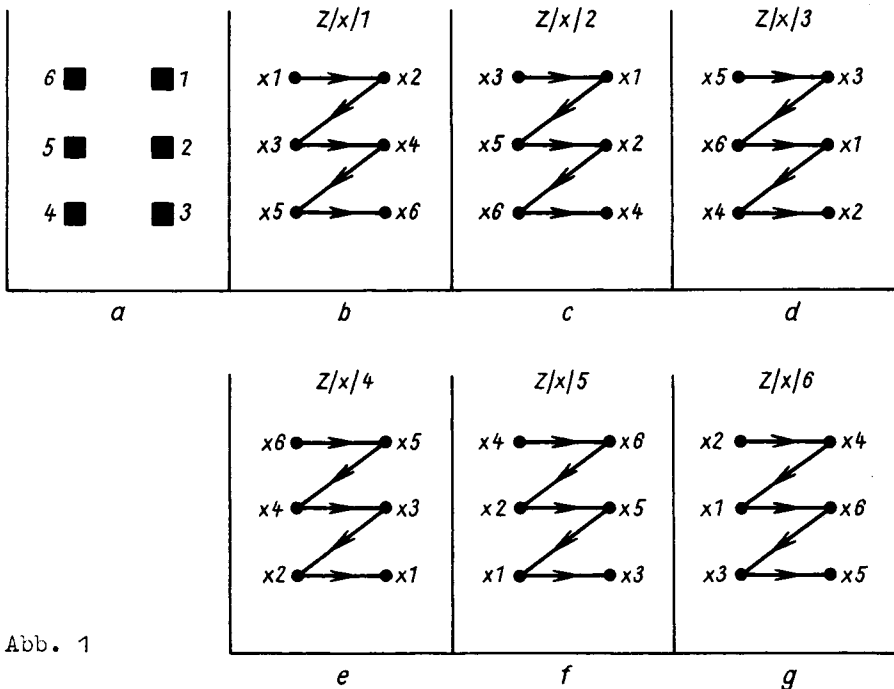


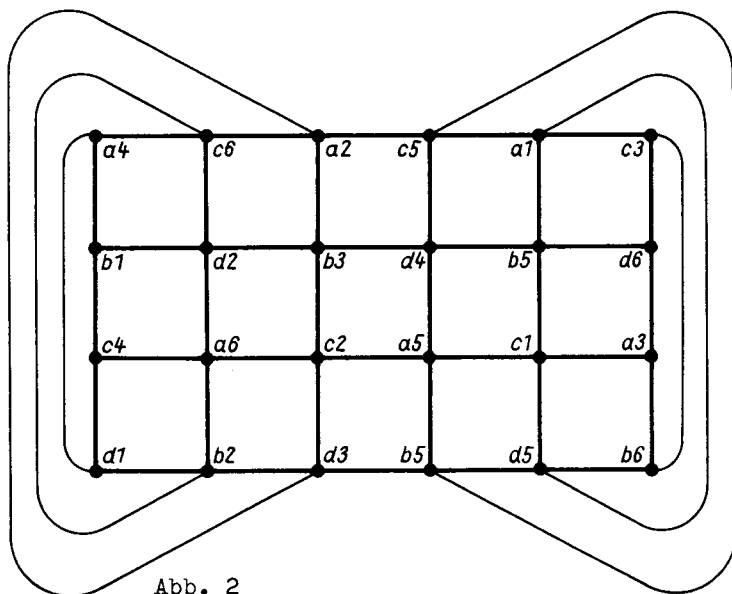
Abb. 1

Nun bilden wir die ersten 6 der 7 paaren planaren Graphen, in die wir den K_{24} zerlegen.

S_1 : $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 - Z/a/1$ $a_6 c_5 a_4 c_3 a_2 c_1 - Z/ac/4$
 $b_2 b_4 b_1 b_6 b_3 b_5 - Z/b/6$ $b_3 d_1 b_5 d_2 b_6 d_4 - Z/bd/2$
 $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 - Z/c/1$ $c_6 a_5 c_4 a_3 c_2 a_1 - Z/ca/4$
 $d_2 d_4 d_1 d_6 d_3 d_5 - Z/d/6$ $d_3 b_1 d_5 b_2 d_6 b_4 - Z/db/2$

$S_2:$	a3 a1 a5 a2 a6 a4 - Z/a/2	$S_5:$	a4 c6 a2 c5 a1 c3 - Z/ac/5
	b4 b6 b2 b5 b1 b3 - Z/b/5		b1 d2 b3 d4 b5 d6 - Z/bd/1
	c3 c1 c5 c2 c6 c4 - Z/c/2		c4 a6 c2 a5 c1 a3 - Z/ca/5
	d4 d6 d2 d5 d1 d3 - Z/d/5		d1 b2 d3 b4 d5 b6 - Z/db/1
$S_3:$	a5 a3 a6 a1 a4 a2 - Z/a/3	$S_6:$	a2 c4 a1 c6 a3 c5 - Z/ac/6
	b6 b5 b4 b3 b2 b1 - Z/b/4		b2 d4 b1 d6 b3 d5 - Z/bd/6
	c5 c3 c6 c1 c4 c2 - Z/c/3		c2 a4 c1 a6 c3 a5 - Z/ca/6
	d6 d5 d4 d3 d2 d1 - Z/d/4		d2 b4 d1 b6 d3 b5 - Z/db/6

Dabei entspricht jedem der 6 Blöcke S_1, S_2, \dots, S_6 ein Graph der Abb. 2. In Abb. 2 ist die Bezeichnung so gewählt, daß sie gerade



dem Block S_5 entspricht. Die anderen 5 Graphen sind zu diesem isomorph, man wähle nur die den Blöcken entsprechenden Bezeichnungen. Der 7. Graph der Zerlegung des K_{24} besitzt die Kanten

(a1,c1), (a2,c2), ..., (a6,c6) ,
 (b1,d1), (b2,d2), ..., (b6,d6) .

Die 7 Graphen sind offenbar paar und planar. Der Beweis dafür, daß alle Kanten tatsächlich einmal auftreten, wird in Satz 2 erbracht.

Nunmehr beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 2: Es gilt $p(8k) = 2k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$).

B e w e i s : Wegen Satz 1 genügt es zu zeigen, daß man den K_{8k} in $2k+1$ paare planare Graphen zerlegen kann. Gemäß dem im vorigen Hilfssatz geschilderten Verfahren schreiben wir uns zunächst die Zerlegung eines total gerichteten Graphen mit $2k$ Knotenpunkten in $2k$ gerichtete offene Hamiltonlinien auf, wobei jeder Knotenpunkt genau einmal Anfangs- und genau einmal Endpunkt einer der $2k$ Hamiltonlinien ist.

1	2	3	4	...	$2k-3$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	- Z/.. /1
3	1	5	2	...	$2k-1$	$2k-4$	$2k$	$2k-2$	- Z/.. /2
5	3	7	1	...	$2k$	$2k-6$	$2k-2$	$2k-4$	- Z/.. /3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮⋮⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮⋮⋮
$2k-5$	$2k-7$	$2k-3$	$2k-9$...	10	4	8	6	- Z/.. /k-2
$2k-3$	$2k-5$	$2k-1$	$2k-7$...	8	2	6	4	- Z/.. /k-1
$2k-1$	$2k-3$	$2k$	$2k-5$...	6	1	4	2	- Z/.. /k
$2k$	$2k-1$	$2k-2$	$2k-3$...	4	3	2	1	- Z/.. /k+1
$2k-2$	$2k$	$2k-4$	$2k-1$...	2	5	1	3	- Z/.. /k+2
$2k-4$	$2k-2$	$2k-6$	$2k$...	1	7	3	5	- Z/.. /k+3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮⋮⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮⋮⋮
6	8	4	10	...	$2k-9$	$2k-3$	$2k-7$	$2k-5$	- Z/.. /2k-2
4	6	2	8	...	$2k-7$	$2k-1$	$2k-5$	$2k-3$	- Z/.. /2k-1
2	4	1	6	...	$2k-5$	$2k$	$2k-3$	$2k-1$	- Z/.. /2k

Nun geben wir die ersten $2k$ paaren planaren Graphen der Zerlegung des K_{8k} an, wobei wir die beim Beweis des Hilfssatzes eingeführten Abkürzungen verwenden. Wir teilen die $8k$ Knotenpunkte in vier Klassen A, B, C, D zu je $2k$ Knotenpunkten ein. Wir bezeichnen die Knotenpunkte mit a_1, a_2, \dots, a_{2k} ; b_1, b_2, \dots, b_{2k} ; c_1, c_2, \dots, c_{2k} ; d_1, d_2, \dots, d_{2k} .

Die $2k$ ersten paaren planaren Graphen der Zerlegung sind

	Z/a/1	Z/a/2	Z/a/k-1	Z/a/k
	Z/b/2k	Z/b/2k-1	Z/b/k+2	Z/b/k+1
S_1 :	Z/c/1	S_2 : Z/c/2	$\dots; S_{k-1}$: Z/c/k-1;	S_k : Z/c/k
	Z/d/2k	Z/d/2k-1	Z/d/k+2	Z/d/k+1

$$\begin{array}{cccc}
Z/ac/k+1 & Z/ac/k+2 & Z/ac/2k-1 & Z/ac/2k \\
Z/bd/k-1 & Z/bd/k-2 & Z/bd/1 & Z/bd/2k \\
S_{k+1}: Z/ca/k+1; S_{k+2}: Z/ca/k+2; \dots; S_{2k-1}: Z/ca/2k-1; S_{2k}: Z/ca/2k & & & \\
Z/db/k-1 & Z/db/k-2 & Z/db/1 & Z/db/2k .
\end{array}$$

Dabei bedeutet z.B. der Block S_3 eine Abkürzung für

$$\begin{array}{cccccccc}
a_5 & a_3 & a_7 & a_1 & \dots & a_{2k} & a_{2k-6} & a_{2k-2} & a_{2k-4} \\
b_6 & b_8 & b_4 & b_{10} & \dots & b_{2k-9} & b_{2k-3} & b_{2k-7} & b_{2k-5} \\
c_5 & c_3 & c_7 & c_1 & \dots & c_{2k} & c_{2k-6} & c_{2k-2} & c_{2k-4} \\
d_6 & d_8 & d_4 & d_{10} & \dots & d_{2k-9} & d_{2k-3} & d_{2k-7} & d_{2k-5} .
\end{array}$$

Der Block S_{2k-1} bedeutet eine Abkürzung für

$$\begin{array}{cccccccc}
a_4 & c_6 & a_2 & c_8 & \dots & a_{2k-7} & c_{2k-1} & a_{2k-5} & c_{2k-3} \\
b_1 & d_2 & b_3 & d_4 & \dots & b_{2k-3} & d_{2k-2} & b_{2k-1} & d_{2k} \\
c_4 & a_6 & c_2 & a_8 & \dots & c_{2k-7} & a_{2k-1} & c_{2k-5} & a_{2k-3} \\
d_1 & b_2 & d_3 & b_4 & \dots & d_{2k-3} & b_{2k-2} & d_{2k-1} & b_{2k} .
\end{array}$$

Jedem dieser $2k$ Blöcke entspricht ein paarer planarer Graph, der isomorph dem von Abb. 3 ist, wobei die Knotenpunkte mit den entsprechenden Elementen des zugehörigen Blockes zu identifizieren sind. Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Graphen paar und planar sind. Abb. 3 trägt die Bezeichnungen des Blockes S_3 .

Der $(2k+1)$ -te paare planare Graph besitzt die Kanten

$$\begin{array}{l}
(a_1, c_1), (a_2, c_2), \dots, (a_{2k}, c_{2k}) , \\
(b_1, d_1), (b_2, d_2), \dots, (b_{2k}, d_{2k}) .
\end{array}$$

Die ersten $2k$ Graphen enthalten je $4(2k-1) + 4(2k)$ Kanten. Der $(2k+1)$ -te Graph enthält $4k$ Kanten. Insgesamt haben wir also

$$2k(4(4k-1)) + 4k = 32k^2 - 4k = \frac{1}{2}(8k)(8k-1) = \binom{8k}{2}$$

Kanten untergebracht. Auch der K_{8k} besitzt $\binom{8k}{2}$ Kanten. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß keine Kante zweimal auftritt.

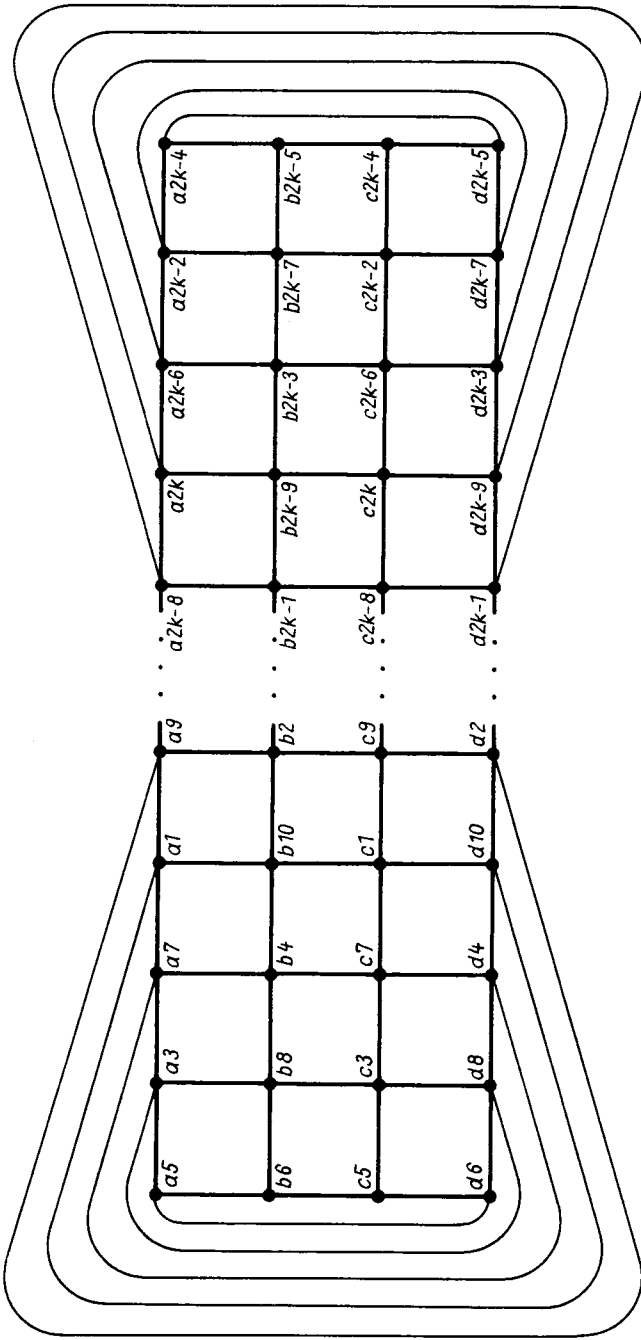


Abb. 3

Bekanntlich ist das Schema S so beschaffen, daß in irgend k aufeinanderfolgenden Zeilen jede Zahl genau einmal neben jeder anderen Zahl steht. Daraus ergibt sich, daß in den Zerlegungen S_1, S_2, \dots, S_k die Kanten

$$(a_i, a_j), (b_i, b_j), (c_i, c_j), (d_i, d_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2k; i \neq j)$$

genau einmal auftreten. In den anderen k Zerlegungen tritt keine Kante dieser Art auf. Aus demselben Grund treten in der Zerlegungen $S_{k+1}, S_{k+2}, \dots, S_{2k}$ die Kanten

$$(a_i, c_j), (b_i, d_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2k; i \neq j)$$

genau einmal auf, in den ersten k Zerlegungen aber keine Kante dieser Art. In dem $(2k+1)$ -ten Graph sind die Kanten

$$(a_i, c_i), (b_i, d_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2k)$$

untergebracht. Wir haben noch zu zeigen, daß alle Kanten der Form $(a_i, b_j), (b_i, c_j), (c_i, d_j), (d_i, a_j)$ in den Zerlegungen S_1, S_2, \dots, S_{2k} auftreten.

Wegen der Symmetrie der Zerlegungen S_m ($m = 1, \dots, 2k$) genügt es zu zeigen, daß es keinen Knotenpunkt a_s gibt, der in zwei verschiedenen Zerlegungen über einem und demselben Knotenpunkt b_t steht.

$Y(i, l)$ sei der Platz des Knotenpunktes l ($1 \leq 2k$) in der Zerlegung $Z/./i$. Es gilt wegen der Konstruktion der $Z/./i$ ($i = 1, 2, \dots, 2k$) gemäß Abb. 4

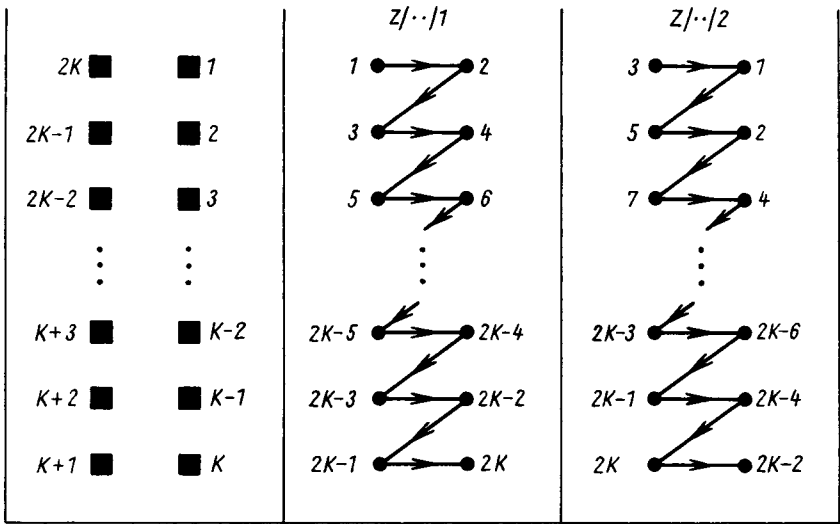
$$Y(i, l) \equiv Y(1, l) + i - 1 \pmod{2k}. \quad (2.1)$$

Nun gilt

$$Y(1, l) = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{für } l \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(4k-l+1) & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.2)$$

Damit erhält man

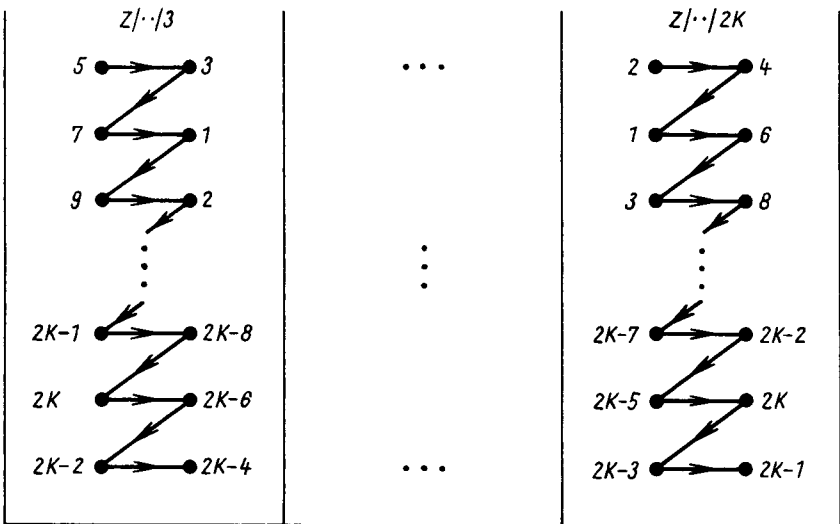
$$Y(i, l) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(1+2i-2) \pmod{2k} & \text{für } l \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(-1+2i-1) \pmod{2k} & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.3)$$



a

b

c



d

e

Abb. 4

Angenommen, as und bt nehmen in zwei Zerlegungen denselben Platz ein. Es gibt also zwei Zahlen i, j mit $i \neq j$ und $1 \leq i, j \leq 2k$ für die

$$\alpha. Y(i, as) \equiv Y(2k-i+1, bt) \pmod{2k}, \quad (1 \leq i \leq k) \text{ bzw.}$$

$$\beta. Y(i, as) \equiv Y(2k-i, bt) \pmod{2k}, \quad (k+1 \leq i \leq 2k)$$

und

$$\gamma. Y(j, as) \equiv Y(2k-j+1, bt) \pmod{2k}, \quad (1 \leq j \leq k) \text{ bzw.}$$

$$\delta. Y(j, as) \equiv Y(2k-j, bt) \pmod{2k}, \quad (k+1 \leq j \leq 2k) \text{ gilt.}$$

Aus (2.3) erhält man

$$Y(2k-i+1, bt) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2i) \pmod{2k} & \text{für } t \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(-t-2i+1) \pmod{2k} & \text{für } t \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$Y(2k-i, bt) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2i-2) \pmod{2k} & \text{für } t \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(-t-2i-1) \pmod{2k} & \text{für } t \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nun untersuchen wir die Fälle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

$$\alpha. Y(i, as) \equiv Y(2k-i+1, bt) \pmod{2k}, \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$1. \quad s, t \text{ gerade:} \quad \frac{1}{2}(s+2i-2) \equiv \frac{1}{2}(t-2i) \pmod{2k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(s-t+4i-2) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$2. \quad s \text{ gerade, } t \text{ ungerade:} \quad \frac{1}{2}(s+t+4i-3) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$3. \quad s \text{ ungerade, } t \text{ gerade:} \quad \frac{1}{2}(-s-t+4i-1) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$4. \quad s, t \text{ ungerade:} \quad \frac{1}{2}(-s+t+4i-2) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$\beta. Y(i, as) \equiv Y(2k-i, bt) \pmod{2k}, \quad (k+1 \leq i \leq 2k)$$

$$1. \quad s, t \text{ gerade:} \quad \frac{1}{2}(s-t+4i) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$2. \quad s \text{ gerade, } t \text{ ungerade:} \quad \frac{1}{2}(s+t+4i-1) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$3. \quad s \text{ ungerade, } t \text{ gerade:} \quad \frac{1}{2}(-s-t+4i+1) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$4. \quad s, t \text{ ungerade:} \quad \frac{1}{2}(-s+t+4i) \equiv 0 \pmod{2k}$$

Nun untersuchen wir das gleichzeitige Erfülltsein von

$$1. \quad \alpha \text{ und } \gamma \quad (1 \leq i, j \leq k; i \neq j)$$

$$11. \quad s, t \text{ gerade:} \Rightarrow \frac{1}{2}(4i-4j) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$\Rightarrow i - j \equiv 0 \pmod{k}. \text{ Andererseits folgt aber aus}$$

$1 \leq i, j \leq k$, daß $1 \leq |i - j| \leq k - 1$ ist. Das ist aber ein Widerspruch.

12. s gerade, t ungerade: $\Rightarrow 2i - 2j \equiv 0 \pmod{2k}$.

Widerspruch (siehe 11.)!

13. s ungerade, t gerade: Siehe 11.!

14. s, t ungerade: Siehe 11.!

2. α und δ ($1 \leq i \leq k; k+1 \leq j \leq 2k$)

21. s, t gerade: $\frac{1}{2}(4i-4j-2) \equiv 0 \pmod{2k} \Rightarrow 1 \equiv (2i-2j) \pmod{2k}$
 $\Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{2k}$, Widerspruch!

22. s gerade, t ungerade:

23. s ungerade, t gerade:

24. s, t ungerade:

} Siehe 21.!

3. β und γ ($k+1 \leq i \leq 2k; 1 \leq j \leq k$) siehe 2.!

4. β und δ ($k+1 \leq i, j \leq 2k; i \neq j$) siehe 1.!

Damit ist gezeigt, daß as und bt nicht in zwei verschiedenen Zerlegungen denselben Platz einnehmen können.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3: Es gilt $p(8k-1) = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$

B e w e i s : In Satz 1 hatten wir bewiesen, daß

$p(8k-1) > \frac{1}{4}(8k-1+1) = 2k$ ist, also $p(8k-1) \geq 2k + 1$. Da aber $p(8k) = 2k + 1$ ist und $p(n)$ offenbar monoton wachsend ist, folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 4: Es gilt $p(8k+1) = 2k + 1$, $k = 2, 3, \dots$

B e w e i s : Wir müssen wegen Satz 1 und Satz 2 nur zeigen, daß man auf den $2k + 1$ Ebenen, auf die der K_{8k} paar zerlegt wurde, noch einen Knotenpunkt y unterbringen kann und mit ihm die $8k$ Kanten, die y mit den Knotenpunkten a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, 2k$) in K_{8k+1} verbindet.

Diese $8k$ Kanten bringen wir wie folgt unter:

Zunächst kann man auf der $(2k+1)$ -ten Ebene der Zerlegung des K_{8k} die Kanten $[a_i, d_i], [b_i, c_i], (i = 1, 2, \dots, 2k)$ so einfügen, daß der entstehende Graph paar und planar ist. Er besteht dann aus lauter isolierten Vierecken. Streicht man diese Kanten aus dem Graphen, der in der $2k$ -ten Ebene der Zerlegung des K_{8k} gezeichnet ist, so kann man statt dessen auf der $2k$ -ten Ebene die Kanten $[y, a_i], [y, d_i] (i = 1, 2, \dots, 2k)$ so unterbringen, daß der entstehende Graph paar und planar ist. Auf der ersten Ebene der Zerlegung des K_{8k} können wir in zulässiger Weise die Kanten $[y, c_1]$ und $[y, b_4]$ unterbringen, denn es ist $k \geq 2$! Auf der i -ten Ebene der Zerlegung des K_{8k} können wir in zulässiger Weise die Kante $[y, c_i] (i = 2, 3, 5, 6, 7, 8, \dots, 2k-1)$ unterbringen. Auf der vierten Ebene können wir die Kante $[y, c_{2k}]$ zulässig unterbringen.

Auf der (inzwischen aus lauter isolierten Vierecken bestehenden) $(2k+1)$ -ten Ebene können wir zulässig die Kanten $[y, b_i] (i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, \dots, 2k)$ und $[y, c_4]$ unterbringen. Damit sind alle $8k$ Kanten zulässig untergebracht. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Wie man sieht kann man für $k = 1$ den Beweis nicht in dieser Weise führen. Wir hatten aber für den K_9 auch am Anfang gezeigt, daß die untere Schranke für $p(9)$ nicht der wirkliche Wert ist, sondern daß $p(9) = 4$ gilt.

Satz 5: Es gilt $p(8k+4) = 2k+2, k = 1, 2, \dots$

B e w e i s : Wegen Satz 1 müssen wir nur zeigen, daß man den K_{8k+4} in $2k+2$ paare planare Graphen zerlegen kann. Das unten stehende Schema entstehe aus dem Schema S wie folgt: Die Zerlegung $Z/./i'$ entsteht aus der Zerlegung $Z/./i$, indem an die erste Stelle das Element $2k+1$ gesetzt wird, die anderen Elemente folgen in der durch $Z/./i$ gegebenen Reihenfolge. Entsprechend entsteht $Z/./i''$ aus $Z/./i$, indem die Reihenfolge wie in $Z/./i$ beibehalten wird, nur an die $(2k+1)$ -te Stelle wird zusätzlich das Element $2k+1$ gesetzt.

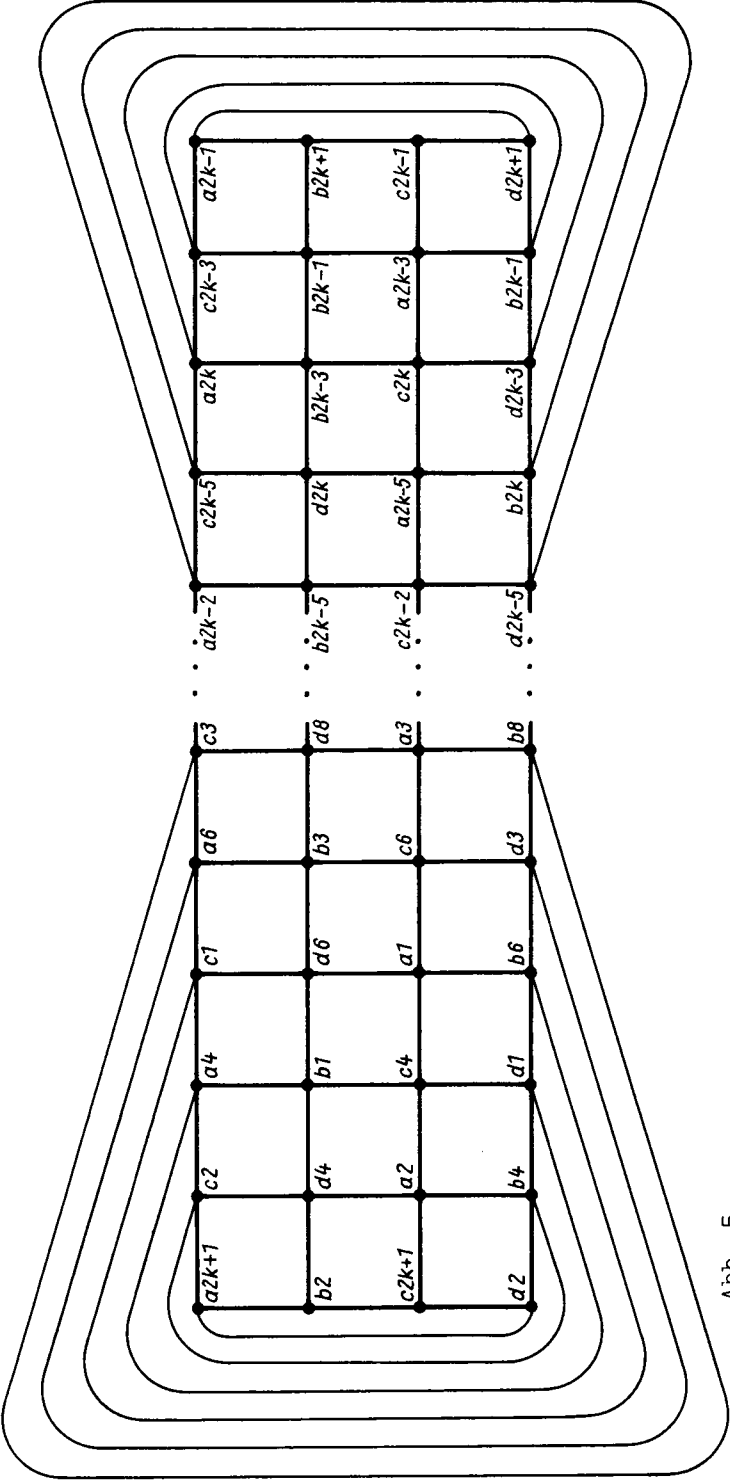


Abb. 5

$2k+1$	1	2	3	4	...	$2k-3$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	- $Z/.. / 1'$
$2k+1$	3	1	5	2	...	$2k-1$	$2k-4$	$2k$	$2k-2$	- $Z/.. / 2'$
$2k+1$	5	3	7	1	...	$2k$	$2k-6$	$2k-2$	$2k-4$	- $Z/.. / 3'$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2k+1$	6	8	4	10	...	$2k-9$	$2k-3$	$2k-7$	$2k-5$	- $Z/.. / 2k-2'$
$2k+1$	4	6	2	8	...	$2k-7$	$2k-1$	$2k-5$	$2k-3$	- $Z/.. / 2k-1'$
$2k+1$	2	4	1	6	...	$2k-5$	$2k$	$2k-3$	$2k-1$	- $Z/.. / 2k'$
1	2	3	4	...	$2k-3$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	- $Z/.. / 1''$
3	1	5	2	...	$2k-1$	$2k-4$	$2k$	$2k-2$	$2k+1$	- $Z/.. / 2''$
5	3	7	1	...	$2k$	$2k-6$	$2k-2$	$2k-4$	$2k+1$	- $Z/.. / 3''$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6	8	4	10	...	$2k-9$	$2k-3$	$2k-7$	$2k-5$	$2k+1$	- $Z/.. / 2k-2''$
4	6	2	8	...	$2k-7$	$2k-1$	$2k-5$	$2k-3$	$2k+1$	- $Z/.. / 2k-1''$
2	4	1	6	...	$2k-5$	$2k$	$2k-3$	$2k-1$	$2k+1$	- $Z/.. / 2k''$

Die $2k$ ersten paaren planaren Graphen der Zerlegung des K_{8k+4} entstehen wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
 S_1: & \begin{array}{l} Z/a/1' \\ Z/b/1'' \\ Z/c/1' \\ Z/d/1'' \\ Z/ac/k+1' \\ Z/bd/k+1'' \end{array} & \begin{array}{l} S_2: \\ \dots \\ S_{k+2}: \end{array} \begin{array}{l} Z/a/2' \\ Z/b/2'' \\ Z/c/2' \\ Z/d/2'' \\ Z/ac/k+2' \\ Z/bd/k+2'' \end{array} \dots S_k: \begin{array}{l} Z/a/k' \\ Z/b/k'' \\ Z/c/k' \\ Z/d/k'' \\ Z/ac/2k' \\ Z/bd/2k'' \end{array} \\
 S_{k+1}: & \begin{array}{l} Z/ca/k+1' \\ Z/db/k+1'' \end{array} & \begin{array}{l} S_{k+2}: \\ \dots \\ S_{2k}: \end{array} \begin{array}{l} Z/ca/k+2' \\ \dots \\ Z/db/k+2'' \end{array} \dots S_{2k}: \begin{array}{l} Z/ca/2k' \\ Z/db/2k'' \end{array}
 \end{array}$$

Dabei haben wir die $8k+4$ Knotenpunkte des K_{8k+4} wieder in vier Klassen A, B, C, D eingeteilt mit den Knotenpunkten a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, 2k+1$).

Entsprechend den Abkürzungen beim Beweis von Satz 2 bedeutet z.B. S_{2k} eine Abkürzung für

$$\begin{array}{cccccccccc}
 a_{2k+1} & c_2 & a_4 & c_1 & a_6 & \dots & c_{2k-5} & a_{2k} & c_{2k-3} & a_{2k-1} \\
 b_2 & d_4 & b_1 & d_6 & b_3 & \dots & d_{2k} & b_{2k-3} & d_{2k-1} & b_{2k+1}
 \end{array}$$

c_{2k+1} a_2 c_4 a_1 c_6 ... a_{2k-5} c_{2k} a_{2k-3} c_{2k-1}
 d_2 b_4 d_1 b_6 d_3 ... b_{2k} d_{2k-3} b_{2k-1} d_{2k+1} .

Jedem dieser Blöcke entspricht ein Graph von Abb. 5. Die Bezeichnung des Graphen von Abb. 5 entspricht der von S_{2k} .

Den $(2k+1)$ -ten paaren planaren Graphen der Zerlegung des K_{8k+4} zeigt die Abb. 6, den $(2k+2)$ -ten Graphen der Zerlegung zeigt Abb. 7.

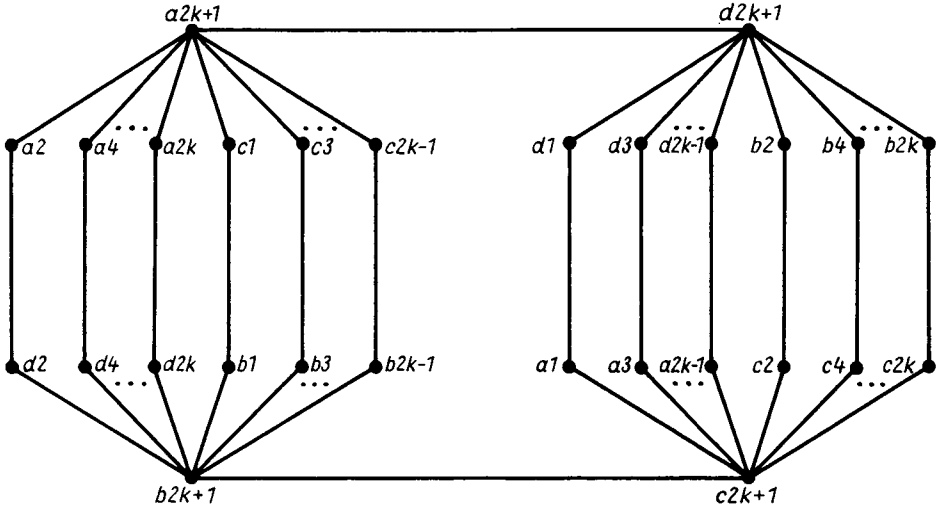


Abb. 6

S_{2k+1}

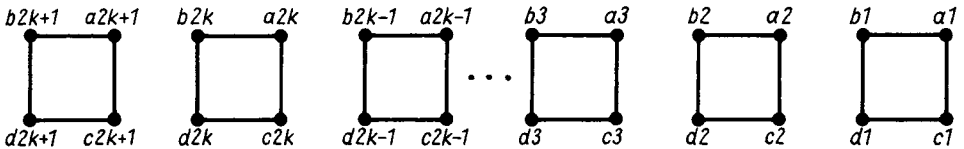


Abb. 7

Die $2k+2$ Graphen der Zerlegung sind offensichtlich paar und planar. Unter Verwendung der Tatsache, daß in den $2k$ Zeilen des beim Beweis von Satz 2 eingeführten Schemas S für zwei beliebige Knotenpunkte i und j genau einmal die Konstellation $\dots i j \dots$ und genau einmal die Konstellation $\dots j i \dots$ auftritt, kann man zeigen, daß in der Zerlegung des K_{8k+4} jede Kante genau einmal auftritt. Damit ist der Satz 5 bewiesen.

Satz 6: Es gilt $p(8k+3) = 2k+2$, $k = 1, 2, \dots$

B e w e i s : Aus Satz 1 ergibt sich $p(8k+3) \geq 2k + 2$. Da sich aber, wie in Satz 5 bewiesen, der K_{8k+4} auf $2k+2$ paare planare Graphen zerlegen läßt, gilt auch $p(8k+3) \leq 2k + 2$. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Satz 7: Es gilt $p(8k+5) = 2k + 2$, $k = 1, 2, \dots$

B e w e i s : Mit ähnlichen Überlegungen wie beim Beweis von Satz 4 läßt sich dieser Satz beweisen.

Damit ist die paare Dicke in etwa $3/4$ aller Fälle bestimmt.