

Rekurrenente Anzahlbestimmung von unvollständigen Eckenfärbungen und teilweisen Zusammenziehungen von Graphen

Alexander A. Zykov

Wir betrachten endliche ungerichtete schlingenlose Graphen (X, U) ohne Mehrfachkanten mit der Eckenmenge X und der Kantenmenge U ; dabei unterscheiden wir zwei Arten von Kanten, nämlich weiche Kanten (Elemente von \tilde{U}) und harte Kanten (Elemente von \bar{U}), wobei

$$U = \tilde{U} \cup \bar{U}, \quad \tilde{U} \cap \bar{U} = \emptyset.$$

Wir bezeichnen mit $\tilde{m}(L) = |\tilde{U}|$ die Anzahl der weichen Kanten des Graphen L , mit E_n einen leeren (kantenlosen) n -eckigen Graphen und mit F_n einen vollständigen n -eckigen Graphen. Sind in einem F_n alle Kanten hart, so werden wir, um diese Tatsache zu betonen, \bar{F}_n schreiben. Der Nullgraph $E_0 (= F_0)$ sei ein Graph mit $X = \emptyset$, $U = \emptyset$.

Unter einem teilweisen Homomorphismus $\phi : L \rightarrow L'$ eines Graphen $L = (X, \tilde{U} \cup \bar{U})$ auf einen Graphen $L' = (X', \tilde{U}' \cup \bar{U}')$ versteht man eine eindeutige Abbildung ϕ einer bestimmten Teilmenge $Y \subseteq X$ auf die ganze Menge X' , welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (a) $\forall x, y \in Y \{ (x, y) \in \tilde{U} \Rightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in \tilde{U}' \cup \bar{U}' \vee \phi(x) = \phi(y) \}$,
- (b) $\forall x, y \in Y \{ (x, y) \in \bar{U} \Rightarrow (\psi(x), \psi(y)) \in \bar{U}' \}$.

Nach (b) ist das vollständige Urbild (im folgenden abgekürzt durch v.U.) einer Ecke $z' \in X'$ ein Graph ohne harte Kanten (unter dem v.U. von z' versteht man entweder die Eckenmenge $\phi^{-1}(z')$ oder auch den von dieser Menge erzeugten Untergraphen von L).

Ein teilweiser Homomorphismus $\phi : L \rightarrow F_i$ heißt $\binom{j}{i}$ -Färbung ($i, j \geq 0$) des Graphen L , wenn

- 1) genau j Ecken von X auf die Ecken von F_i abgebildet werden;
- 2) das v.U. einer Ecke von F_i stets ein leerer Untergraph von L ist;
- 3) das v.U. des ganzen F_i keine harte Kante besitzt.

Wir betrachten zwei $\binom{j}{i}$ -Färbungen ϕ_1, ϕ_2 eines Graphen $L = (X, U)$ als identisch, falls die Menge Y der gefärbten (d.h. der Abbildung unterworfenen) Ecken in beiden Fällen dieselbe ist und

$$\forall x, y \in Y \{ \phi_1(x) = \phi_1(y) \iff \phi_2(x) = \phi_2(y) \}.$$

Die Anzahl der verschiedenen $\binom{j}{i}$ -Färbungen eines Graphen L bezeichnen wir mit $r_i^j(L)$; dabei setzen wir

$$\left. \begin{aligned} r_i^j(E_0) &= 0, \text{ falls } i > 0 \vee j > 0; \\ r_0^0(L) &= 1, \\ r_i^j(L) &= 0, \text{ falls } i > j \vee j > |X| \end{aligned} \right\} \text{ für alle } L.$$

Ein teilweiser Homomorphismus $\phi : L \rightarrow \bar{F}_i$ heißt $\binom{j}{i}$ -Zusammenziehung des Graphen $L = (X, U)$, wenn

- 1) genau j Ecken von X auf die Ecken von \bar{F}_i abgebildet werden;
- 2) das v.U. einer Ecke von \bar{F}_i stets ein zusammenhängender Untergraph von L ist;
- 3) $\forall x', y' \in \bar{F}_i \{ x' \neq y' \Rightarrow$

$$\forall x \in \phi^{-1}(x') \quad \forall y \in \phi^{-1}(y') \quad [(x, y) \in U] \}.$$

Wir betrachten zwei $\binom{j}{i}$ -Zusammenziehungen ϕ_1 und ϕ_2 eines Graphen L als identisch, falls die Urbildmenge Y dieselbe ist und

$$\forall x, y \in Y \{ \phi_1(x) = \phi_1(y) \iff \phi_2(x) = \phi_2(y) \}.$$

Die Anzahl der verschiedenen $\binom{j}{i}$ -Zusammenziehungen eines Graphen L bezeichnen wir mit $h_i^j(L)$; dabei setzen wir

$$h_1^j(E_0) = 0, \text{ falls } i > 0 \vee j > 0 ;$$

$$\left. \begin{aligned} h_0^0(L) &= 1, \\ h_1^j(L) &= 0, \text{ falls } i > j \vee j > |X| \end{aligned} \right\} \text{ für alle } L.$$

Um die Zahlen $r_1^j(L)$ und $h_1^j(L)$ für einen gegebenen Graphen L zu finden, wenden wir ein rekurrentes Verfahren an.

Sei $L = (X, \tilde{U} \cup \bar{U})$ ein Graph mit $\tilde{m}(L) > 0$ und mit geordneter Menge \tilde{U} , und sei $u = (x,y)$ die erste weiche Kante.

Dann definieren wir:

$$L_\alpha = (X, (\tilde{U} - \{u\}) \cup \bar{U})$$

(L nach Weglassen der Kante u);

$$L_\zeta = (X, (\tilde{U} - \{u\}) \cup (\tilde{U} \cup \{u\}))$$

(L nach "Härtung" der Kante u);

$$L_\beta = (X_\beta, U_\beta)$$

entstehe aus L_α folgendermaßen: Die beiden Ecken x, y werden durch eine neue Ecke xy ersetzt, welche zu genau denjenigen Ecken $z \in X - \{x,y\}$ benachbart sein soll, welche in L zu mindestens einer der Ecken x, y benachbart sind; dabei soll eine Kante der Art (xy,z) in L_β genau dann hart sein, wenn mindestens eine der beiden Kanten (x,z) und (y,z) in L hart ist;

$$L_\lambda = (X_\beta - \{xy\}, U_\lambda)$$

(L_β nach Weglassen der Ecke xy).

Die Beziehungen zwischen dem ursprünglichen Graphen L und den erhaltenen Graphen $L_\alpha, L_\zeta, L_\beta, L_\lambda$ sind in Abb. 1 illustriert. In jedem der erhaltenen Graphen können die verbliebenen weichen Kanten in beliebiger Weise geordnet werden.

Dann gilt:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}(L) \neq 0 &\Rightarrow r_1^j(L) = r_1^j(L_\alpha) - r_1^{j-1}(L_\beta) + r_1^{j-1}(L_\lambda), \\ \tilde{m}(L) = 0 &\Rightarrow r_1^j(L) = e_j(L) \cdot r_1^j(E_j) = e_j(L) \cdot \frac{\Delta_{10}^j}{j!}; \end{aligned} \right\} (1)$$

wobei $e_j(L)$ die Anzahl der in L enthaltenen Untergraphen der Form E_j bezeichnet; die $\frac{\Delta^i 0^j}{i!}$ sind die Stirlingschen Zahlen zweiter Art, d.h. die Koeffizienten der Zerlegung der Potenz t^j nach verallgemeinerten Potenzen

$$t^{(0)} = 1, \quad t^{(1)} = t, \quad t^{(2)} = t \cdot (t-1), \quad \dots, \\ t^{(j)} = t(t-1)(t-2) \dots (t-j+1)$$

der Variablen t .

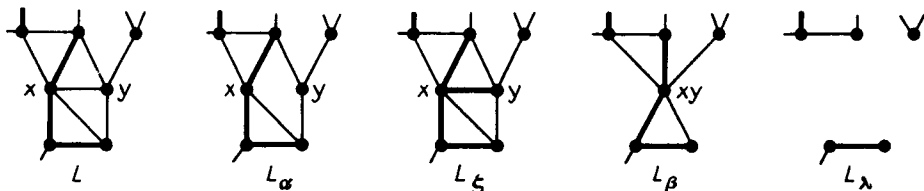


Abb. 1

Wir führen ein Polynom R zweier formaler Variabler u, v ein:

$$R(L) = \sum_{i, j \geq 0} r_i^j(L) u^{(i)} v^j.$$

Wenn wir beide Seiten von (1) mit $u^{(i)} v^j$ multiplizieren und über alle $i \geq 0, j \geq 0$ summieren, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}(L) \neq 0 &\Rightarrow R(L) = R(L_\alpha) - vR(L_\beta) + vR(L_\lambda) \\ &\text{(Rekursionsgleichung),} \\ \tilde{m}(L) = 0 &\Rightarrow R(L) = \sum_{i=0} e_i(L) u^i v^i \\ &\text{(Anfangsbedingung).} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ähnliche Überlegungen liefern

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}(L) \neq 0 &\Rightarrow h_i^j(L) = h_i^j(L_\zeta) + h_i^{j-1}(L_\beta) - h_i^{j-1}(L_\lambda), \\ \tilde{m}(L) = 0 &\Rightarrow h_i^j(L) = f_j(L) \cdot \delta_i^j, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wobei $f_j(L)$ die Anzahl der in L enthaltenen Untergraphen der Form F_j bezeichnet und

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Indem wir weiter das Polynom

$$H(L) = \sum_{i,j \geq 0} h_{ij}^j(L) \cdot u^i v^j$$

der formalen Variablen u, v einführen, erhalten wir aus (3):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}(L) \neq 0 &\Rightarrow H(L) = H(L_\zeta) + vH(L_\beta) - vH(L_\lambda) \\ &\text{(Rekursionsgleichung),} \\ \tilde{m}(L) = 0 &\Rightarrow H(L) = \sum_{i \geq 0} f_i(L) \cdot u^i v^i \\ &\text{(Anfangsbedingung).} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Also können wir $R(L)$ mittels der Zerlegungsoperation

$$L \rightarrow \{L_\alpha, L_\beta, L_\lambda\}$$

und $H(L)$ mittels der Zerlegungsoperation

$$L \rightarrow \{L_\zeta, L_\beta, L_\lambda\}$$

bestimmen. Es bleibt nur die Aufgabe, beide Operationen, die entsprechenden Rekursionsgleichungen sowie die Anfangsbedingungen so zu vereinigen, daß die gleichzeitige Errechnung von $R(L)$ und $H(L)$ mittels der einzigen Zerlegungsoperation

$$L \rightarrow \{L_\alpha, L_\zeta, L_\beta, L_\lambda\}$$

durchgeführt werden kann, ohne die Graphen der Form L_β und L_λ in den Zwischenstadien doppelt berücksichtigen zu müssen.

Es sei K ein assoziativer kommutativer Ring mit den Erzeugenden 1 (der Einheit), u, v und α unter der Bedingung $\alpha^2 = \alpha$. Wir setzen

$$\Phi(L) = \alpha R(L) + (1-\alpha) H(L).$$

Dann gilt:

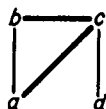
$$\begin{aligned} \tilde{m}(L) \neq 0 &\Rightarrow \Phi(L) = \alpha\Phi(L_\alpha) + (1-\alpha)\Phi(L_\zeta) \\ &\quad + (1-2\alpha)v\Phi(L_\beta) + (2\alpha-1)v\Phi(L_\lambda), \end{aligned}$$

$$\tilde{m}(L) = 0 \Rightarrow \Phi(L) = \alpha \sum_{i \geq 0} e_i(L) u^i v^i + (1-\alpha) \sum_{i \geq 0} f_i(L) u^i v^i.$$

So gilt z.B. für den in Abb. 2 dargestellten Graphen L (wobei wir die links gezeichnete weiche Kante als die erste ansehen):

$$\begin{aligned}
 \Phi(\text{diagram}) &= \alpha\Phi(\text{diagram}) + (1 - \alpha)\Phi(\text{diagram}) + (1 - 2\alpha)v\Phi(\text{diagram}) + \\
 &+ (2\alpha - 1)v\Phi(\text{diagram}) = \alpha[\alpha\Phi(\text{diagram}) + (1 - \alpha)\Phi(\text{diagram}) + \dots] + \dots = \\
 &= \alpha\Phi(\text{diagram}) + 0 + \dots + \dots = \alpha[\alpha R(\text{diagram}) + (1 - \alpha)H(\text{diagram}) + \dots] + \\
 &+ \dots = \alpha R(\text{diagram}) + 0 + \dots = \alpha(1 + 4uv + 4u^2v^2 + u^3v^3) + \dots = \\
 &= \alpha(1 + 4uv - 2uv^2 + 4u^2v^2 - u^2v^3 + u^3v^3) + (1 - \alpha)(1 + \\
 &+ 4uv + 2uv^2 + 4u^2v^2 + 3u^2v^3 + u^2v^4 + u^3v^3 + u^3v^4)
 \end{aligned}$$

$i=0, j=0:$



$i=1, j=1:$

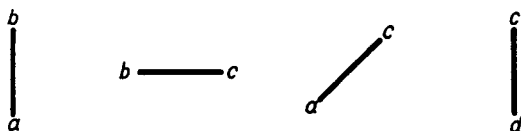
$a \qquad b \qquad c \qquad d$

Abb. 3

$i=1, j=2:$

$ab \qquad cd$

$i=2, j=2:$



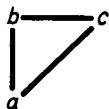
$i=2, j=3:$



$i=2, j=4:$

$ab \text{ --- } cd$

$i=3, j=3:$



$i=3, j=4:$

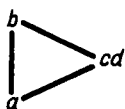


Abb. 2

(der Leser kann alle nicht explizit ausgeführten und durch Pünktchen ersetzten Umformungen selbständig einfügen). Daraus folgt

$$R(L) = 1 + 4uv - 2uv^2 + 4u^2v^2 - \dots = 1 + 4u^{(1)}v - 2u^{(1)}v^2 + 4(u^{(2)} + u^{(1)})v^2 - \dots = 1 + 4u^{(1)}v + 2u^{(1)}v^2 + 4u^{(2)}v^2 + 2u^{(2)}v^3 + u^{(3)}v^3,$$

$$H(L) = 1 + 4uv + 2uv^2 + 4u^2v^2 + 3u^2v^3 + u^2v^4 + u^3v^3 + u^3v^4.$$

Alle Zusammenziehungen und Eckenfärbungen von L sind in Abb. 3 bzw. Abb. 4 dargestellt.

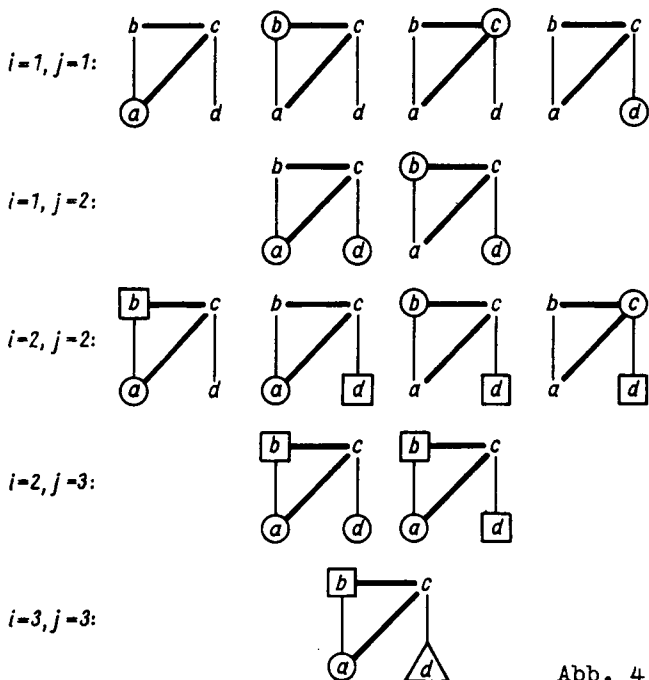


Abb. 4

Die ausführliche Darlegung der Beweise ist in folgender Arbeit enthalten:

Literatur

Zykov, A.A.: Die gleichzeitige Berechnung der Anzahl unvollständiger Eckenfärbungen und teilweisen Zusammenziehungen eines Graphen. Kibernetika (im Druck).